浙江科技学院学报，第25卷第6期，2013年12月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 25 No. 6, Dec. 2013

doi: 10.3969/j.issn.1671-8798.2013.06.002

两两 PQD 序列部分和之和的弱大数律

沈建伟
(浙江科技学院 理学院，杭州 310023)

摘　要： 利用随机变量的截尾方法和两两 PQD 序列的矩不等式，得到了矩条件下两两 PQD 序列部分和之和的弱大数律，该结果去除了随机变量对称同分布的限制条件，推广了若干已有的弱大数律。

关键词： 两两 PQD 序列；部分和之和；弱大数律；截尾

中图分类号： O211.4　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-8798(2013)06-0409-05

Weak law of large numbers for sum of partial sums of pairwise PQD sequence of random variables

SHEN Jianwei
(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: The weak law of large numbers for sum of partial sums of pairwise PQD sequence of random variables is obtained under the moment conditions by the truncation methods of random variables and moment inequalities of pairwise PQD sequence. The available results which eliminate the restriction of symmetric random variable and identical distribution extend to some known theorems.

Key words: pairwise PQD sequence; sum of partial sums; weak law of large numbers; truncation

随机变量序列部分和之和的极限性质，在理论和实践中均是有必要的。最初对部分和之和的研究，是 Resnick[1] 及 Arnold 等[2] 在研究纪录值的极限理论时发现的。而在实际问题中，如随机游动、破产理论及时间序列理论中均有必要研究部分和之和。基于此，江涛等[3-4] 得到了 I. I. D. 随机变量序部分和之和的大数定律，宇世航[5-6] 给出了对称同分布 NA 序列部分和之和的弱大数定律和同分布 NA 序列部分和之和的强大数定律，查婷婷[7] 给出了对称同分布 PA 序列部分和之和的弱大数定律，俞周晓等[8] 得到了分布对称的 PA 序列部分和之和的弱大数定律并通过对 PA 列收敛速度的限制弱化了文献[7]中定理的条件。本研究得到了两两 PQD 序列部分和之和的弱大数定律，去除了随机变量分布对称和同分布的限制条件。

收稿日期： 2013-06-04
作者简介： 沈建伟(1972—　)，男，浙江省萧山人，讲师，硕士，主要从事概率极限理论研究。

1 引 理

定义 1[9] 称随机变量 X 和 Y 是 PQD(Positively Quadrant Dependent)的，若对 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 都有

$$P(X \leqslant x, Y \leqslant y) \geqslant P(X \leqslant x) P(Y \leqslant y)。$$

称随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是两两 PQD 的，若对 $\forall i \neq j$，X_i 与 X_j 是 PQD 的。

文中总设 c 代表正常数，在不同的地方可以代表不同的值。对于随机变量列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$，记：$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，称为 X_i 的部分和；$T_n = \sum_{i=1}^{n} S_i$，称为 X_i 的部分和之和；$T_n^* = \sum_{i=1}^{n} iX_i$. 记 $w(k) = \sup_{i \geqslant 1} \sum_{j-i \geqslant k} |\operatorname{cov}(X_i, X_j)|^{1/2}$。

引理 1[9] 设随机变量 X 和 Y 是 PQD 的，则

1) $EXY \geqslant EX\, EY$；

2) 若 f, g 同为非降(或非增)函数，则 $f(X)$ 与 $g(Y)$ 仍为 PQD 的。

引理 2[10] 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是均值为零的两两 PQD 序列，则

$$E \max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k^2 \leqslant \left(\frac{\log(2n)}{\log 2}\right)^2 ES_n^2。$$

引理 3[11] 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是均值为零的两两 PQD 序列。假设 $\sum_{i=1}^{\infty} w^{1/2}(2^i) < \infty$，则存在与 n 无关的正常数 c，使得以下式子成立：

$$ES_n^2 \leqslant cn\{\sup_{i \geqslant 1} EX_i^2 + 1\}。$$

进一步，由**引理 2** 及**引理 3** 可知

$$E \max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k^2 \leqslant cn \log^2 n \{\sup_{i \geqslant 1} EX_i^2 + 1\}。\tag{1}$$

引理 4[12] 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是任意随机序列。如果存在某随机变量 X，使对任意 $x > 0$ 及 $n \geqslant 1$，有 $P\{|X_n| \geqslant x\} \leqslant cP\{|X| \geqslant x\}$，则对 $\forall \beta > 0$，$\forall t > 0$ 有

$$E|X_n|^{\beta} I(|X_n| \leqslant t) \leqslant c(E|X|^{\beta} I(|X| \leqslant t) + t^{\beta} P\{|X| > t\}),$$

$$E|X_n|^{\beta} I(|X_n| > t) \leqslant cE|X|^{\beta} I(|X| > t)。$$

2 主要结果

定理 1 设 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 为同分布的两两 PQD 序列，$\sum_{i=1}^{\infty} w^{1/2}(2^i) < \infty$，$0 < p < 2$。对下面 3 个条件：

A) $\lim_{n \to \infty} n^{1+\delta} P(|X_1| > n^{1/p}) = 0$，$\forall \delta > 0$；

B) 存在常数列 $\{b_k, k \geqslant 1\}$，使得 $\max_{1 \leqslant k \leqslant n} (T_k^* - b_k)/n^{1+1/p} \xrightarrow{P} 0$；

C) $\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |X_k|/n^{1/p} \xrightarrow{P} 0$。

有：A⇒B⇒C。

定理 2 设 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 为两两 PQD 序列，$\sum_{i=1}^{\infty} w^{1/2}(2^i) < \infty$，$0 < p < 2$。如果存在某随机变量 X，使对任意 $x > 0$ 及 $n \geqslant 1$，有 $P\{|X_n| \geqslant x\} \leqslant cP\{|X| \geqslant x\}$，对下面 3 个条件：

A) $\lim_{n \to \infty} n^{1+\delta} P(|X| > n^{1/p}) = 0$，$\forall \delta > 0$；

B) 存在常数列 $\{b_k, k \geqslant 1\}$，使得 $\max_{1 \leqslant k \leqslant n} (T_k^* - b_k)/n^{1+1/p} \xrightarrow{P} 0$；

C) $\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |X_k|/n^{1/p} \xrightarrow{P} 0$。

有：A⇒B⇒C。

3　定理的证明

定理 1 的证明　先证:A⇒B。

用 T_n^{*s} 表示 T_n^* 的对称化,由强对称不等式

$$P(\sup_{n\geqslant 1}|T_n^*-m(T_n^*)|\geqslant \varepsilon n^{1+1/p})\leqslant 2P(\sup_{n\geqslant 1}|T_n^{*s}|\geqslant \varepsilon n^{1+1/p})\leqslant 4P(\sup_{n\geqslant 1}|T_n^*-c_n|\geqslant \varepsilon n^{1+1/p}),$$

其中 $m(T_n^*)$ 表示 T_n^* 的中位数,可知:

若存在实数列 $\{c_n,n\geqslant 1\}$,使 $\sup\limits_{n\geqslant 1}|T_n^*-c_n|n^{-(1+1/p)}\xrightarrow{P}0$,则 $\sup\limits_{n\geqslant 1}|T_n^{*s}|n^{-(1+1/p)}\xrightarrow{P}0$,

反之,若 $\sup\limits_{n\geqslant 1}|T_n^{*s}|n^{-(1+1/p)}\xrightarrow{P}0$,则存在 $c_n=m(T_n^*)$,使 $\sup\limits_{n\geqslant 1}|T_n^*-c_n|n^{-(1+1/p)}\xrightarrow{P}0$。

又因为两两 PQD 序列的对称化序列仍是两两 PQD 序列,故只需对对称化序列证明定理成立即可。

不失一般性,不妨设 $\{X_i,i\geqslant 1\}$ 为分布对称的同分布两两 PQD 序列,且设条件 B 中的 $b_k=0,k\geqslant 1$;则只需证:对 $\forall\varepsilon>0$,有

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|T_k^*|\geqslant \varepsilon n^{1+1/p}\}\to 0,n\to\infty。\tag{2}$$

记 $Y_i=-n^{1/p}I(X_i<n^{1/p})+X_iI(|X_i|\leqslant n^{1/p})+n^{1/p}I(X_i>n^{1/p})$。

由 $\{X_i,i\geqslant 1\}$ 的对称性可知,$\{Y_i,i\geqslant 1\}$ 仍是对称的,故 $EY_i=EiY_i=0$。

由于 $\{X_i,i\geqslant 1\}$ 为两两 PQD 序列,故由**引理 1** 知 $\{iY_i,i\geqslant 1\}$ 仍为两两 PQD 序列。

注意到

$$\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|T_k^*|\geqslant \varepsilon n^{1+1/p}\}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i|>n^{1/p}\}\cup\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}iY_i|\geqslant \varepsilon n^{1+1/p}\}。$$

$$\begin{aligned}P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|T_k^*|\geqslant \varepsilon n^{1+1/p}\}&\leqslant\sum_{i=1}^{n}P\{|X_i|>n^{1/p}\}+P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}iY_i|\geqslant \varepsilon n^{1+1/p}\}\\&:=I_1+I_2\end{aligned}\tag{3}$$

由 $\{X_i,i\geqslant 1\}$ 的同分布性及条件 A 可知:

$$I_1=\sum_{i=1}^{n}P\{|X_i|>n^{1/p}\}=nP\{|X_1|>n^{1/p}\}\to 0,n\to\infty。\tag{4}$$

对 $\forall\beta>0$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{1+\delta}P(|X_1|>n^{1/p})=0,\forall\delta>0$ 可知:

存在 $N_0>0$,当 $k>N_0$ 时,有

$$(k+1)^{1+\delta}P(|X_1|>n^{1/p})<\beta。\tag{5}$$

由 Markov 不等式,式(1),$\{X_i,i\geqslant 1\}$ 的同分布性,式(5) 可得

$$\begin{aligned}I_2&=P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}iY_i|\geqslant \varepsilon n^{1+1/p}\}\leqslant\\&(\varepsilon n)^{-2(1+1/p)}E\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}iY_i|\Big)^2\leqslant\\&(\varepsilon n)^{-2(1+1/p)}cn\log^2 n\{\sup_{i\geqslant 1}E(iY_i)^2+1\}\leqslant\\&cn^{1-2/p}\log^2 n\{E|Y_1|^2+1\}\leqslant\\&cn\log^2 nP(|X_1|>n^{1/p})+cn^{1-2/p}\log^2 nE|X_1|^2I(|X_1|\leqslant n^{1/p})+cn^{1-2/p}\log^2 n\\&:=I_{21}+I_{22}+I_{23}\end{aligned}\tag{6}$$

对于 I_{21},由条件 A 可知

$$I_{21}\to 0,n\to\infty。\tag{7}$$

$$\begin{aligned}I_{22}&=cn^{1-2/p}\log^2 nE|X_1|^2I(|X_1|\leqslant n^{1/p})=\\&cn^{1-2/p}\log^2 n\sum_{k=1}^{n}E|X_1|^2I((k-1)^{1/p}\leqslant|X_1|\leqslant k^{1/p})\leqslant\end{aligned}$$

$$cn^{1-2/p}\log^2 n\sum_{k=1}^{n}k^{2/p}(P\{|X_1|>(k-1)^{1/p}\}-P\{|X_1|>k^{1/p}\}=$$

$$cn^{1-2/p}\log^2 n\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{2/p}P\{|X_1|>k^{1/p}\}-\sum_{k=1}^{n}k^{2/p}P\{|X_1|>k^{1/p}\}\Big)\leqslant$$

$$cn^{1-2/p}\log^2 n\Big(\sum_{k=0}^{n}((k+1)^{2/p}-k^{2/p})P\{|X_1|>k^{1/p}\}\Big)\leqslant$$

$$cn^{1-2/p}\log^2 n\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{2/p-1}P\{|X_1|>k^{1/p}\}=$$

$$cn^{1-2/p}\log^2 n\sum_{k=0}^{N_0}(k+1)^{2/p-1}P\{|X_1|>k^{1/p}\}+cn^{1-2/p}\log^2 n\sum_{k=N_0+1}^{n}(k+1)^{2/p-1}P\{|X_1|>k^{1/p}\}\leqslant$$

$$cN_0^{2/p}n^{1-2/p}\log^2 n+cn^{1-2/p}\log^2 n\sum_{k=N_0+1}^{n}(k+1)^{2/p-2-\delta}\beta\leqslant$$

$$cn^{1-2/p}\log^2 n+c\beta n^{1-2/p}(n+1)^{2/p-1-\delta}\log^2 n\leqslant$$

$$cn^{1-2/p}\log^2 n+cn^{-\delta}\log^2 n$$

由 $0<p<2$ 可知 $1-2/p<0$，所以

$$n^{1-2/p}\log^2 n\to 0,n\to\infty。\tag{8}$$

同理，对于 $\forall\delta>0$，可得

$$n^{-\delta}\log^2 n\to 0,n\to\infty。\tag{9}$$

由式(8)，式(9) 可知

$$I_{22}\to 0,n\to\infty。\tag{10}$$

$$I_{23}\to 0,n\to\infty。\tag{11}$$

由式(7)，式(10)，式(11) 可知

$$I_2\to 0,n\to\infty。\tag{12}$$

由式(3)，式(4)，式(12) 可知式(2) 成立，即条件 B 成立。

再证：B⇒C。

显然：$T_n^*-T_{n-1}^*=nX_n$，从而 $\dfrac{|X_n|}{n^{1/p}}=\dfrac{|T_n^*-T_{n-1}^*|}{n^{1+1/p}}\leqslant\dfrac{|T_n^*|}{n^{1+1/p}}+\dfrac{|T_{n-1}^*|}{n^{1+1/p}}$。

则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k|/n^{1/p}\leqslant 2\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|T_k^*|/n^{1+1/p}$

由条件 B 可知 $0\leqslant P(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k|/n^{1/p}\geqslant\varepsilon)\leqslant P(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|T_k^*|/n^{1+1/p}\geqslant\varepsilon/2)\to 0$。

即条件 C 成立。

定理 1 证毕。

定理 2 的证明　先证：A⇒B。

沿用**定理 1** 的符号与表达式，由**定理 1** 中 A⇒B 的证明过程知，只需证明：

$$I_1\to 0,I_2\to 0。$$

$$I_1=\sum_{i=1}^{n}P\{|X_i|>n^{1/p}\}\leqslant cnP\{|X|>n^{1/p}\}\to 0,n\to\infty。\tag{13}$$

由 Markov 不等式，式(1)，**引理 4** 可得

$$I_2=P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}iY_i|\geqslant\varepsilon n^{1+1/p}\}\leqslant$$

$$(\varepsilon n)^{-2(1+1/p)}E\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}iY_i|\Big)^2\leqslant$$

$$(\varepsilon n)^{-2(1+1/p)}cn\log^2 n\{\sup_{i\geqslant 1}E(iY_i)^2+1\}\leqslant$$

$$cn^{1-2/p}\log^2 n\{\sup_{i\geqslant 1}EY_i^2+1\}\leqslant$$

$$cn\log^2 n\sup_{i\geqslant 1}P(|X_i|>n^{1/p})+cn^{1-2/p}\log^2 n\sup_{i\geqslant 1}E|X_i|^2 I(|X_i|\leqslant n^{1/p})+cn^{1-2/p}\log^2 n\leqslant$$
$$cn\log^2 nP(|X|>n^{1/p})+cn^{1-2/p}\log^2 nE|X|^2 I(|X|\leqslant n^{1/p})+cn^{1-2/p}\log^2 n \tag{14}$$
$$:=I_{21}+I_{22}+I_{23}$$

对于 $I_{21}=cn\log^2 nP(|X|>n^{1/p})$,由条件 A 可知

$$I_{21}\to 0,n\to\infty。\tag{15}$$

对于 $I_{22}=cn^{1-2/p}\log^2 nE|X|^2 I(|X|\leqslant n^{1/p})$;$I_{23}=cn^{1-2/p}\log^2 n$,类同于**定理 1** 中的讨论,有

$$I_{22}\to 0,n\to\infty;I_{23}\to 0,n\to\infty。\tag{16}$$

由式(14),式(15),式(16)可知 $I_2\to 0,n\to\infty$。即条件 B 成立。

再证:B⇒C。同**定理 1** 的证明。

定理 2 证毕。

参考文献:

[1] Resnick S I. Limit laws for record values [J]. Stochastic Processes and their Applications,1973,1(1):67-82.

[2] Arnold B C, Villasenor J A. The asymptotic distributions of sums of records [J]. Kluwer Academic Publishers,1999,1(3):351-363.

[3] 江涛,林日其. I. I. D. 随机变量部分和之和的极限定理[J]. 淮南工业学院学报,2002,22(2):73-78.

[4] 江涛,苏淳,唐启鹤. I. I. D. 随机变量部分和之随机和的极限定理[J]. 中国科学技术大学学报,2001,31(4):394-399.

[5] 宇世航. 同分布 NA 序列部分和之和的弱大数定律[J]. 哈尔滨师范大学学报:自然科学版,2004,20(4):21-24.

[6] 宇世航. 同分布 NA 序列部分和之和的强大数定律[J]. 山东大学学报:理学版,2008,43(4):62-66.

[7] 查婷婷. 同分布 PA 序列部分和之和的弱大数定律[J]. 安徽建筑工业学院学报:自然科学版,2009,17(4):94-96.

[8] 俞周晓,王文胜. PA 序列部分和之和的弱大数定律[J]. 杭州师范大学学报:自然科学版,2012,11(2):181-184.

[9] Lehmann E L. Some concepts of dependence [J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1966,37(5):1137-1153.

[10] 陆凤彬. 两两 PQD 序列的完全收敛性和强大数定律[J]. 应用数学,2003,16(4):29-33.

[11] 刘庆. 两两 PQD 序列的大数定律[J]. 浙江大学学报:理学版,2011,38(2):140-143.

[12] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京:科学出版社,2006.