浙江科技学院学报，第 26 卷第 1 期，2014 年 2 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 26 No. 1，Feb. 2014

doi：10.3969/j.issn.1671-8798.2014.01.001

Weitzenböck 公式的一点注记

殷炜栋

（浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

摘　要：Weitzenböck 公式在研究黎曼流形上曲率对调和形式的影响时起了极大的作用；通过导出此公式在局部正交规范标架场中的显式表达式，可以再得到闭的 n 维正曲率空间形式上的 p 次微分形式必然为零，其中 $p=1\cdots n-1$。

关键词：Weitzenböck 公式；空间形式；正曲率

中图分类号：O186.12　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2014)01-0001-04

A remark in Weitzenböck formula

YIN Weidong

（School of Sciences，Zhejiang University of Science and Technology，Hangzhou 310023，China）

Abstract：We revisit the general Weitzenböck formula and derive its expression in a local orthonormal frame. Besides that，we applicate this formula to some space forms with positive sectional curvature while $p=1\cdots n-1$.

Key words：Weitzenböck formula；space form；positive sectional curvature

1　引　言

在黎曼几何里，Weitzenböck 公式有很广泛的应用。它的特殊形式

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2=|\nabla^2 f|^2+\langle\nabla f,\nabla(\Delta f)\rangle+\mathrm{Ric}(\nabla f,\nabla f)$$

在证明 Li-Yau 梯度估计时起了非常重要的作用[1]；最近它也被推广到了 Finsler 几何中去[2]。从上面公式可以看到曲率对调和形式的影响，而且由 Hodge定理，又可以从调和形式得到流形整体的拓扑性质[3]。它在黎曼几何中的一般形式可以叙述成如下定理[4-5]：

定理 1　如果 e_i 是流形 M^n 上局部规范正交标架场，e^i 是其对偶标架场，$i=1,2\cdots n$，$\omega\in\Omega^p(M)$ 是 M

收稿日期：2014-01-20

基金项目：浙江科技学院科研启动基金资助项目(F701108D02)

作者简介：殷炜栋(1980—　)，男，浙江省嘉兴人，讲师，博士，主要从事几何分析方面的研究。

上的 p 次微分形式,那么

$$\Delta_H\omega=\nabla^*\nabla\omega+\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}[e^i\cdot e^j,R(e_i,e_j)\omega] \tag{1}$$

式(1)中:$\Delta_H=d\delta+\delta d$ 是 Hodge Laplacian算子;$\nabla^*\nabla=-\mathrm{div}\nabla$是 Rough Laplacian算子;$e^i\cdot e^j$是 Clifford 乘积;$[e^i\cdot e^j,R(e_i,e_j)\omega]=e^i\cdot e^j\cdot R(e_i,e_j)\omega-R(e_i,e_j)\omega\cdot e^i\cdot e^j$ 是交换子。

2 主要结果

接下去将导出**定理 1** 在一般局部正交规范标架场中不带 Clifford 乘积的计算公式,这在一般的计算中更熟悉。于是有:

定理 2 如果 e_i 是流形 M^n 上局部规范正交标架场,e^i是其对偶标架场,$i=1,2\cdots n$,$\omega\in\Omega^p(M)$ 是 M 上的 p 次微分形式,那么

$$\Delta_H\omega=\nabla^*\nabla\omega+\rho_\omega \tag{2}$$

式(2)中:$\rho_\omega(X_1,\cdots,X_p)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(R(e_i,X_j)\omega)(X_1,\cdots,X_{j-1},e_i,X_{j+1},\cdots X_p)$,是 p-次微分形式。

备注:**定理 1** 用 Clifford 乘积的一个好处是,Weitzenöck 公式可以进一步推广到 Spin Geometry 中去[6]。

在给出证明前,先约定使用的符号:g 表示黎曼度量;R 表示曲率算子,即

$$R:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM),$$

$$R:X\times Y\times Z\to R(X,Y)Z=(\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]})Z,$$

$$R(e_i,e_j)e_k=R_{ijk}^{m}e_m,\langle R(e_i,e_j)e_k,e_l\rangle=\langle R_{ijk}^{m}e_m,e_l\rangle=R_{ijk}^{m}g_{ml}=R_{ijlk},R_{il}=Ric_{il}=g^{jk}R_{ijlk}\text{。}$$

首先证明**引理 1**。

引理 1 ρ_ω 定义如前,那么

$$(\rho_\omega)_{i_1\cdots i_p}=-\sum_{m,k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{p}R_{ki_jmi_l}\omega_{i_1\cdots i_{l-1}mi_{l+1}\cdots i_{j-1}ki_{j+1}\cdots i_p}+\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}R_{i_jm}\omega_{i_1\cdots i_{j-1}mi_{j+1}\cdots i_p} \tag{3}$$

证明:由于等式两边都是张量,所以只需在一点处证明即可。取流形上一点 P 及该点附近的局部正交规范标架场$\{e_i\}_{i=1}^{n}$,使得$\nabla_{e_i}e_j(p)=0$。直接计算,得

$$\begin{aligned}
(\rho_\omega)_{i_1\cdots i_p}={}&\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}[R(e_k,e_{i_j})\omega](e_{i_1}\cdots e_{i_{j-1}},e_k,e_{i_{j+1}}\cdots e_{i_p})=\\
&\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}[(\nabla_{e_k}\nabla_{e_{i_j}}-\nabla_{e_{i_j}}\nabla_{e_k})\omega](e_{i_1}\cdots e_{i_{j-1}},e_k,e_{i_{j+1}}\cdots e_{i_p})=\\
&\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\nabla_{e_k}(\nabla_{e_{i_j}}\omega(e_{i_1}\cdots e_{i_{j-1}},e_k,e_{i_{j+1}}\cdots e_{i_p}))-\nabla_{e_{i_j}}(\nabla_{e_k}\omega(e_{i_1}\cdots e_{i_{j-1}},e_k,e_{i_{j+1}}\cdots e_{i_p}))=\\
&\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\{\nabla_{e_k}[\nabla_{e_{i_j}}(\omega(e_{i_1}\cdots e_{i_{j-1}},e_k,e_{i_{j+1}}\cdots e_{i_p}))-\omega(\nabla_{e_{i_j}}(e_{i_1}\cdots e_{i_{j-1}},e_k,e_{i_{j+1}}\cdots e_{i_p}))]-\\
&\nabla_{e_{i_j}}[\nabla_{e_k}(\omega(e_{i_1}\cdots e_{i_{j-1}},e_k,e_{i_{j+1}}\cdots e_{i_p}))-\omega(\nabla_{e_k}(e_{i_1}\cdots e_{i_{j-1}},e_k,e_{i_{j+1}}\cdots e_{i_p}))]\}=\\
&-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\omega[(\nabla_{e_k}\nabla_{e_{i_j}}-\nabla_{e_{i_j}}\nabla_{e_k})(e_{i_1}\cdots e_{i_{j-1}},e_k,e_{i_{j+1}}\cdots e_{i_p})]=\\
&-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}[\sum_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{p}\omega(e_{i_1}\cdots R(e_k,e_{i_j})e_{i_l}\cdots e_{i_p})+\omega(e_{i_1}\cdots R(e_k,e_{i_j})e_k\cdots e_{i_p})]=\\
&-\sum_{m,k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{p}R_{ki_jmi_l}\omega_{i_1\cdots i_{l-1}mi_{l+1}\cdots i_{j-1}ki_{j+1}\cdots i_p}+\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}R_{i_jm}\omega_{i_1\cdots i_{j-1}mi_{j+1}\cdots i_p}
\end{aligned}$$

现在可以证明**定理 2**。比较式(1) 式(2) 的右边,只要证明

$$\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}[e^i\cdot e^j,R(e_i,e_j)\omega]_{i_1\cdots i_p}=(\rho_\omega)_{i_1\cdots i_p}$$

即可。利用 Clifford 乘积的定义[4] 直接计算,有

$$[e^i\cdot e^j, R(e_i,e_j)\omega] = -2(e^i \wedge i_{e_j}(R(e_i,e_j)\omega) - e^j \wedge i_{e_i}(R(e_i,e_j)\omega)),$$

所以

$$\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}[e^i\cdot e^j, R(e_i,e_j)\omega]_{i_1\cdots i_p} =$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(e^i \wedge i_{e_j}(R(e_i,e_j)\omega) - e^j \wedge i_{e_i}(R(e_i,e_j)\omega))_{i_1\cdots i_p} =$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(e^i \wedge i_{e_j}(R(e_i,e_j)\omega))_{i_1\cdots i_p} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(e^j \wedge i_{e_i}(R(e_i,e_j)\omega))_{i_1\cdots i_p} = (I) + (II)$$

然后对(I)和(II)分别计算，有

$$\begin{aligned}
(I) = &-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(e^i \wedge i_{e_j}(R(e_i,e_j)\omega))_{i_1\cdots i_p} = \\
&-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{p}\delta^i_{i_k}(-1)^{k+1} i_{e_j}(R(e_i,e_j)\omega)\Big)_{i_1\cdots \hat{i}_k\cdots i_p} = \\
&-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\delta^i_{i_k}(R(e_i,e_j)\omega)_{i_1\cdots i_{k-1} j i_{k+1}\cdots i_p} = \\
&-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}(R(e_{i_k},e_j)\omega)_{i_1\cdots i_{k-1} j i_{k+1}\cdots i_p} = \\
&\frac{1}{2}\sum_{l,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\Big[\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{p} R^l_{i_k j i_m}\omega_{i_1\cdots i_{m-1} l i_{m+1}\cdots i_{k-1} j i_{k+1}\cdots i_p} + R^l_{i_k j j}\omega_{i_1\cdots i_{k-1} l i_{k+1}\cdots i_p}\Big] = \\
&-\frac{1}{2}\sum_{l,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{p} R_{j i_k l i_m}\omega_{i_1\cdots i_{m-1} l i_{m+1}\cdots i_{k-1} j i_{k+1}\cdots i_p} + \\
&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} R_{i_k l}\omega_{i_1\cdots i_{k-1} l i_{k+1}\cdots i_p}
\end{aligned} \tag{4}$$

类似的，有

$$\begin{aligned}
(II) = &\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(e^j \wedge i_{e_i}(R(e_i,e_j)\omega))_{i_1\cdots i_p} = \\
&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{p}\delta^j_{i_k}(-1)^{k+1} i_{e_i}(R(e_i,e_j)\omega)\Big)_{i_1\cdots \hat{i}_k\cdots i_p} = \\
&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\delta^j_{i_k}(R(e_i,e_j)\omega)_{i_1\cdots i_{k-1} i i_{k+1}\cdots i_p} = \\
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}(R(e_i,e_{i_k})\omega)_{i_1\cdots i_{k-1} i i_{k+1}\cdots i_p} = \\
&-\frac{1}{2}\sum_{l,i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\Big[\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{p} R^l_{i i_k i_m}\omega_{i_1\cdots i_{m-1} l i_{m+1}\cdots i_{k-1} i i_{k+1}\cdots i_p} + R^l_{i i_k i}\omega_{i_1\cdots i_{k-1} l i_{k+1}\cdots i_p}\Big] = \\
&-\frac{1}{2}\sum_{l,i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{p} R_{i i_k l i_m}\omega_{i_1\cdots i_{m-1} l i_{m+1}\cdots i_{k-1} i i_{k+1}\cdots i_p} + \\
&\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} R_{i_k l}\omega_{i_1\cdots i_{k-1} l i_{k+1}\cdots i_p}
\end{aligned} \tag{5}$$

所以由式(3)、式(4)和式(5)有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}[e^i\cdot e^j, R(e_i,e_j)\omega]_{i_1\cdots i_p} = (I) + (II) = \\
-\sum_{l,i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{p} R_{i i_k l i_m}\omega_{i_1\cdots i_{m-1} l i_{m+1}\cdots i_{k-1} i i_{k+1}\cdots i_p} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} R_{i_k l}\omega_{i_1\cdots i_{k-1} l i_{k+1}\cdots i_p} = \\
(\rho_\omega)_{i_1\cdots i_p}
\end{aligned}$$

这就完成了**定理 2** 的证明。

3 应 用

最后再看一下**定理 2** 的一个简单应用。如果有一个常曲率 $K>0$ 的闭黎曼流形(紧致无边)(M^n,g)，那么有

$$R_{ijkl}=\langle R(\partial_i,\partial_j)\partial_l,\partial_k\rangle=K(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})。$$

特别地，当$\{\partial_i\}$ 是规范正交标架时，有

$$R_{ijkl}=K(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}),$$

$$R_{ik}=R_{ijkj}=K(n\delta_{ik}-\delta_{ik})=K(n-1)\delta_{ik}。$$

应用上面的结论，有

$$\begin{aligned}(\rho_\omega,\omega)=&\int_M\langle\rho_\omega,\omega\rangle\mathrm{dvol}=\int_M(\rho_\omega)_{i_1\cdots i_p}\omega_{i_1\cdots l_p}\mathrm{dvol}=\\&\int_M[-\sum_{l,m=1}^n\sum_{j=1}^p\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^pR_{li_jmi_k}\omega_{i_1\cdots i_{j-1}li_{j+1}\cdots i_{k-1}mi_{k+1}\cdots i_p}]\omega_{i_1\cdots l_p}\mathrm{dvol}+\\&\int_M[\sum_{m=1}^n\sum_{j=1}^pR_{i_jm}\omega_{i_1\cdots i_{j-1}mi_{j+1}\cdots i_p}]\omega_{i_1\cdots l_p}\mathrm{dvol}=\\&\int_M-K\sum_{l,m=1}^n\sum_{j=1}^p\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^p(\delta_{lm}\delta_{i_ji_k}-\delta_{li_k}\delta_{mi_j})\omega_{i_1\cdots i_{j-1}li_{j+1}\cdots i_{k-1}mi_{k+1}\cdots i_p}\omega_{i_1\cdots l_p}]\mathrm{dvol}+\\&\int_M\sum_{m=1}^n\sum_{j=1}^pK(n-1)\delta_{i_jm}\omega_{i_1\cdots i_{j-1}mi_{j+1}\cdots i_p}\omega_{i_1\cdots l_p}\mathrm{dvol}=\\&\int_M-Kp(p-1)\omega^2_{i_1\cdots i_p}+Kp(n-1)\omega^2_{i_1\cdots i_p}\mathrm{dvol}=\\&Kp(n-p)\|\omega\|^2_{L^2(M)}\end{aligned}$$

所以当 ω 是调和形式时，有

$$0=(\Delta_H\omega,\omega)=(\nabla^*\nabla\omega,\omega)+(\rho_\omega,\omega)=\|\nabla\omega\|^2_{L^2(M)}+Kp(n-p)\|\omega\|^2_{L^2(M)},$$

也即

$$\|\nabla\omega\|_{L^2(M)}=\|\omega\|_{L^2(M)}=0,$$

所以重新得到如下结论：

定理 3 如果(M^n,g)是 n 维常曲率 $K>0$ 的闭流形(紧致无边)，$\omega\in\Omega^p(M)$ 是 M 上的 p 次调和形式，其中 $p=1,2\cdots n-1$，那么 $\omega\equiv0$。

当然从上面的证明里面可以看到，当 $p=0$ 或 $p=n$ 时，上面的方法行不通。事实上，当然也存在非零的 0 次和 n 次调和形式。关于**定理 3** 更一般的结论可以参考文献[4]。

参考文献：

[1] Li P, Yau S T. Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold[C]//Alan W, Robert O. Geometry of the Laplace Operator, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1980, 36: 205-239.

[2] Ohta S, Sturm K T. Bochner-Weitzenböck formula and Li-Yau estimates on Finsler manifolds[J]. Advances in Mathematics. 2014, 252: 429-448.

[3] Wu H H. The Bochner Technique in Differential Geometry, Mathematical Reports: vol. 3, part 2[M]. London: Harwood Academic Publishers, 1988.

[4] Petersen P. Riemannian Geometry[M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

[5] 伍鸿熙，沈纯理，虞言林. 黎曼几何初步[M]. 北京：北京大学出版社，2003.

[6] Lawson H B, Michelsohn M L. Spin Geometry[M]. Princeton: Princeton University Press, 1989.