浙江科技学院学报，第 27 卷第 1 期，2015 年 2 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 27 No. 1，Feb. 2015

doi：10.3969/j.issn.1671-8798.2015.01.001

行$\tilde{\rho}$混合阵列部分和最大值的完全收敛性

沈建伟
（浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

摘　要：利用随机变量的截尾方法和$\tilde{\rho}$混合序列的矩不等式，得到了一定条件下行$\tilde{\rho}$混合序列部分和最大值的完全收敛性，推广了若干已有的结果。

关键词：行$\tilde{\rho}$混合阵列；完全收敛性；部分和；截尾
中图分类号：O211.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2015)01-0001-05

Complete convergence for maximal partial sums of arrays of rowwise $\tilde{\rho}$-mixing sequence of random variables

SHEN Jianwei
(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: The complete convergence for the maximal partial sums of arrays of rowwise $\tilde{\rho}$-mixing sequence of random variables was obtained under some suitable conditions by the truncation methods of random variables and moment inequalities of $\tilde{\rho}$-mixing sequence. The results available extended some known theorems.

Key words: arrays of rowwise $\tilde{\rho}$-mixing sequence; complete convergence; partial sums; truncation

1　预备知识

设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是定义在概率空间(Ω, A, P)上的随机变量序列，$F_S=\sigma(X_i, i\in S\subset\mathbb{N})$；$F_1^n=\sigma(X_i, i\leqslant n)$，$F_{n+k}^{\infty}=\sigma(X_i, i\geqslant n+k)$为$\sigma^-$域。在$A$中给定$\sigma^-$域$F$和$R$。令

$$\rho(F,R)=\sup_{X\in L_2(F),Y\in L_2(R)}\frac{|EXY-EXEY|}{(\mathrm{Var}X\mathrm{Var}Y)^{1/2}}$$

对$k\geqslant 0$，令

$$\rho(k)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\rho(F_1^n, F_{n+k}^{\infty})$$

$$\tilde{\rho}=\sup\{\rho(F_S,F_T)：有限子集\ S,T\subset\mathbb{N}，且\ \mathrm{dist}(S,T)\geqslant k\},$$

显然，$0\leqslant\tilde{\rho}(k+1)\leqslant\tilde{\rho}(k)\leqslant 1$，且$\tilde{\rho}(0)=1$。

收稿日期：2015-01-06
作者简介：沈建伟(1972—　)，男，浙江省萧山人，讲师，硕士，主要从事概率极限理论研究。

定义 1 对随机序列$\{X_n, n\geqslant 1\}$，若存在$k\in\mathbb{N}$，使得$\tilde{\rho}(k)<1$，则称$\{X_n, n\geqslant 1\}$为$\tilde{\rho}$混合序列。

$\tilde{\rho}$混合序列是由 Bradley[1]引入的一类极为广泛的相依混合序列，当前对此已取得了不少的研究成果。Peligrad 等[2]和 Gan[3]分别研究了$\tilde{\rho}$混合序列的几乎处处收敛性；吴群英[4-6]得到了$\tilde{\rho}$混合序列的若干收敛性质及其加权和的完全收敛性和强收敛性，并研究了$\tilde{\rho}$混合序列的线性模型 M 估计的强相合性；胡学平等[7]得到了$\tilde{\rho}$混合序列部分和的若干收敛性质，推广了文献[4]中的结论；Guo 等[8]研究了行$\tilde{\rho}$混合阵列加权和的矩完全收敛性；Shen 等[9]讨论了行$\tilde{\rho}$混合阵列部分和的强大数律。本研究主要推广了文献[9-10]中的一些结果。

定义 2 假定对每个固定的 n 阵列，$\{X_{ni}, i\geqslant 1\}$是$\tilde{\rho}$混合序列，则称$\{X_{ni}, n\geqslant 1, i\geqslant 1\}$为$\tilde{\rho}$混合的随机变量阵列。

文中总设 C 代表正常数，在不同的地方可以代表不同的值。$I(A)$代表集 A 的示性函数。

引理 1[10] 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$为$\tilde{\rho}$混合序列，$EX_n=0$，$E|X_n|^p<\infty$，对某些 $p\geqslant 2$ 和任意 $n\geqslant 1$，则存在与 n 无关的正常数 D 使得

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{k}X_i\Big|^p\Big)\leqslant D\Big\{\sum_{i=1}^{n}E|X_i|^p+\Big(\sum_{i=1}^{n}EX_i^2\Big)^{p/2}\Big\}$$

2 主要结果及证明

定理 1 设$\{X_{ni}, n\geqslant 1, i\geqslant 1\}$是行$\tilde{\rho}$混合随机变量阵列。$\{a_n, n\geqslant 1\}$是常数列且满足 $0<a_n\uparrow\infty$，$\{g_n(x), n\geqslant 1\}$是定义在$\mathbb{R}$上取正实值的偶函数序列，满足下列条件之一：

1) $g_n(|x|)\uparrow$，当$|x|\uparrow$；存在 $p_n\in(0,1]$，使得$\dfrac{|x|^{p_n}}{g_n(|x|)}\uparrow$，当$|x|\uparrow$。

2) 存在 $p_n\in(1,2]$，使得$\dfrac{|x|}{g_n(|x|)}\downarrow$和$\dfrac{g_n(|x|)}{|x|^{p_n}}\downarrow$，当$|x|\uparrow$；且 $EX_{ni}=0$，$\forall n\geqslant 1$。

如果
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{Eg_n(|X_{ni}|)}{g_n(a_n)}<\infty, \tag{1}$$
那么对于$\forall\varepsilon>0$，
$$\sum_{n=1}^{\infty}P\Big\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{k}X_{ni}\Big|>\varepsilon\Big\}<\infty。\tag{2}$$

定理 1 的证明 记 $X_{ni}^{a_n}=X_{ni}I(|X_{ni}|\leqslant a_n)$，先证：
$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{k}EX_{ni}^{a_n}\Big|\to 0，当 n\to\infty。\tag{3}$$

假设 $g_n(x)$满足条件 1)，则在区间$|x|\leqslant a_n$ 中，可得
$$\frac{|x|^{p_n}}{g_n(|x|)}\leqslant\frac{(a_n)^{p_n}}{g_n(a_n)}；\frac{|x|^{p_n}}{(a_n)^{p_n}}\leqslant\frac{g_n(|x|)}{g_n(a_n)}；\frac{|x|^2}{(a_n)^2}\leqslant\Big(\frac{g_n(|x|)}{g_n(a_n)}\Big)^{2/p_n}\leqslant\frac{g_n(|x|)}{g_n(a_n)}。\tag{4}$$

假设 $g_n(x)$满足条件 2)，在区间$|x|\leqslant a_n$ 中，可得
$$\frac{g_n(|x|)}{|x|^{p_n}}\geqslant\frac{g_n(a_n)}{(a_n)^{p_n}}；\frac{|x|^2}{(a_n)^2}\leqslant\frac{|x|^{p_n}}{(a_n)^{p_n}}\leqslant\frac{g_n(|x|)}{g_n(a_n)}。\tag{5}$$

因此，无论 $g_n(x)$满足条件 1)或 2)，在区间$|x|\leqslant a_n$ 中，都有
$$\frac{|x|^2}{(a_n)^2}\leqslant\frac{g_n(|x|)}{g_n(a_n)}，对\forall n\geqslant 1。\tag{6}$$

若条件 1)满足，结合式(4)、式(1)可得
$$\begin{aligned}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{k}EX_{ni}^{a_n}\Big| &= \max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{k}EX_{ni}I(|X_{ni}|\leqslant a_n)\Big|\leqslant\\ &\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}E|X_{ni}|I(|X_{ni}|\leqslant a_n)\leqslant\\ &\sum_{i=1}^{n}E\Big(\frac{|X_{ni}|}{a_n}\Big)^{p_n}I(|X_{ni}|\leqslant a_n)\leqslant\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} E\frac{g_n(|X_{ni}|)}{g_n(a_n)} I(|X_{ni}| \leqslant a_n) \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n} E\frac{g_n(|X_{ni}|)}{g_n(a_n)} \to 0, \text{当 } n \to \infty。$$

若条件 2)满足,利用$\frac{|x|}{g_n(|x|)}\downarrow$,当$|x|\uparrow$和 $EX_{ni}=0$,结合式(1)可得

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{k} EX_{ni}^{a_n}\right| = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{k} EX_{ni} I(|X_{ni}| > a_n)\right| \leqslant$$
$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n} E|X_{ni}| I(|X_{ni}| > a_n) \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n} E\frac{g_n(|X_{ni}|)}{g_n(a_n)} I(|X_{ni}| \leqslant a_n) \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n} E\frac{g_n(|X_{ni}|)}{g_n(a_n)} \to 0, \text{当 } n \to \infty。$$

故无论 $g_n(x)$满足条件 1)或条件 2),都有式(3)成立。

易见:对于$\forall \varepsilon > 0$,

$$\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{k} X_{ni}\right| > \varepsilon\right\} \subset \bigcup_{i=1}^{n}\{|X_{ni}| > a_n\} \cup \left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{k} X_{ni}^{a_n}\right| > \varepsilon\right\} \subset$$
$$\bigcup_{i=1}^{n}\{|X_{ni}| > a_n\} \cup \left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{1}{a_n}\left(\sum_{i=1}^{k} X_{ni}^{a_n} - \sum_{i=1}^{k} EX_{ni}^{a_n}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} =: A_n \cup B_n。$$

所以,对于 $\forall \varepsilon > 0$,当 n 充分大时,有 $P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{k} X_{ni}\right| > \varepsilon\right\} \leqslant P(A_n) + P(B_n)$。

故要证明式(2)成立,只需证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty。\tag{7}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) < \infty。\tag{8}$$

首先证式(7)。

若条件 1)满足,由 $0 < g_n(|x|)\uparrow$,当$|x|\uparrow$可得,

当$|X_{ni}| > a_n$ 时,
$$g_n(|X_{ni}|) > g_n(a_n)。$$

若条件 2)满足,利用$\frac{|x|}{g_n(|x|)}\downarrow$,当$|x|\uparrow$可得,

当$|X_{ni}| > a_n$ 时,
$$\frac{|X_{ni}|}{g_n(|X_{ni}|)} \leqslant \frac{a_n}{g_n(a_n)},$$

得
$$g_n(|X_{ni}|) \geqslant g_n(a_n)\frac{|X_{ni}|}{a_n} > g_n(a_n)。$$

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P\{|X_{ni}| > a_n\} \leqslant$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P\{g_n(|X_{ni}|) > g_n(a_n)\} \leqslant$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{Eg_n(|X_{ni}|)}{g_n(a_n)} < \infty。$$

再证式(8)。由 Markov 不等式、**引理 1**、式(6)、式(1)可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{1}{a_n}\left(\sum_{i=1}^{k} X_{ni}^{a_n} - \sum_{i=1}^{k} EX_{ni}^{a_n}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} E\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{k} X_{ni}^{a_n} - \sum_{i=1}^{k} EX_{ni}^{a_n}\right)^2\right) \leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}E(X_{ni}^{a_n})^2=$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}E\frac{|X_{ni}|^2I(|X_{ni}|\leqslant a_n)}{a_n^2}\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}E\frac{g_n(|X_{ni}|)}{g_n(a_n)}<\infty。$$

证毕。

在**定理 1** 中，在条件 1)中取 $p_n\equiv1$，在条件 2)中取 $p_n\equiv2$，则可得如下结果：

推论 1 设$\{X_{ni},n\geqslant1,i\geqslant1\}$是行$\tilde{\rho}$混合随机变量阵列。$\{a_n,n\geqslant1\}$是常数列且满足 $0<a_n\uparrow\infty$，$\{g_n(x),n\geqslant1\}$是定义在$\mathbb{R}$上取正实值的偶函数序列，满足条件：$g_n(|x|)\uparrow$，$\frac{|x|}{g_n(|x|)}\uparrow$，当$|x|\uparrow$。如果式(1)成立，那么对于$\forall\varepsilon>0$，式(2)成立。

注：此结论即为文献[9]中的定理 2.2。

推论 2 设$\{X_{ni},n\geqslant1,i\geqslant1\}$是行$\tilde{\rho}$混合随机变量阵列。$\{a_n,n\geqslant1\}$是常数列且满足 $0<a_n\uparrow\infty$，$\{g_n(x),n\geqslant1\}$是定义在$\mathbb{R}$上取正实值的偶函数序列，满足条件：$\frac{|x|}{g_n(|x|)}\downarrow$和$\frac{g_n(|x|)}{|x|^2}\downarrow$，当$|x|\uparrow$；且$EX_{ni}=0$，$n\geqslant1$。如果式(1)成立，那么对于$\forall\varepsilon>0$，式(2)成立。

注：此结论推广了文献[11]中的定理 5.2.3 的结果。

推论 3 在**定理 1** 的条件下，$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}X_{ni}\to0$ a.s.，当 $n\to\infty$。

注：此结论推广了文献[11]中的定理 5.3.5 的结果。

定理 2 设$\{X_{ni},n\geqslant1,i\geqslant1\}$是行$\tilde{\rho}$混合随机变量阵列。$\{a_n,n\geqslant1\}$是常数列且满足 $0<a_n\uparrow\infty$，$\{g_n(x),n\geqslant1\}$是定义在$\mathbb{R}$上取正实值的偶函数序列且 $g_n(|x|)\uparrow$，当$|x|\uparrow$；并满足条件：存在 $p_n\in[2,+\infty)$，使得$\frac{g_n(|x|)}{|x|^{p_n}}\downarrow$，当$|x|\uparrow$。

如果
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Eg_n(|X_{ni}|)}{g_n(a_n)}\right)^{1/p_n}<\infty,\tag{9}$$
那么对于$\forall\varepsilon>0$，式(2)成立。

定理 2 的证明 沿用**定理 1** 的记号，要证明式(2)成立，只需证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty;\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)<\infty。$$

为此，首先证明：$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{k}EX_{ni}^{a_n}\right|\to0$，当 $n\to\infty$。

在区间$|x|\leqslant a_n$ 中，由$\frac{g_n(|x|)}{|x|^{p_n}}\downarrow$，当$|x|\uparrow$可知：

$$\frac{|x|^{p_n}}{g_n(x)}\leqslant\frac{(a_n)^{p_n}}{g_n(a_n)};\frac{|x|^{p_n}}{(a_n)^{p_n}}\leqslant\frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}。\tag{10}$$

由 Jensen 不等式、式(10)、式(9)可得

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{k}EX_{ni}^{a_n}\right|=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{k}EX_{ni}I(|X_{ni}|\leqslant a_n)\right|\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{E|X_{ni}|I(|X_{ni}|\leqslant a_n)}{a_n}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(E\left(\frac{|X_{ni}|}{a_n}\right)^{p_n}I(|X_{ni}|\leqslant a_n)\right)^{1/p_n}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(E\frac{g_n(|X_{ni}|)}{g_n(a_n)}I(|X_{ni}|\leqslant a_n)\right)^{1/p_n}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(E\frac{g_n(|X_{ni}|)}{g_n(a_n)}\right)^{1/p_n}\to 0，当 n\to\infty。$$

由 $1/p_n<2/p_n\leqslant 1<p_n$，正项级数的收敛判别法及式(9)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Eg_n(|X_{ni}|)}{g_n(a_n)}\right)^{2/p_n}<\infty;\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{Eg_n(|X_{ni}|)}{g_n(a_n)}<\infty。\tag{11}$$

由 $0<g_n(|x|)\uparrow$，当$|x|\uparrow$和式(11)可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}P\{|X_{ni}|>a_n\}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{Eg_n(|X_{ni}|)}{g_n(a_n)}<\infty。$$

由 Markov 不等式、**引理 1**、Jensen 不等式、式(10)、式(11)可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)=&\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{1}{a_n}\left(\sum_{i=1}^{k}X_{ni}^{a_n}-\sum_{i=1}^{k}EX_{ni}^{a_n}\right)\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leqslant\\&C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-2}E\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{k}X_{ni}^{a_n}-\sum_{i=1}^{k}EX_{ni}^{a_n}\right)^2\right)\leqslant\\&C\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}E(X_{ni}^{a_n})^2=\\&C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}E\frac{|X_{ni}|^2I(|X_{ni}|\leqslant a_n)}{a_n^2}\leqslant\\&C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(E\left(\frac{|X_{ni}|}{a_n}\right)^{p_n}I(|X_{ni}|\leqslant a_n)\right)^{2/p_n}\leqslant\\&C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(E\frac{g_n(|X_{ni}|)}{g_n(a_n)}\right)^{2/p_n}<\infty。\end{aligned}$$

证毕。

推论 4　在**定理 2** 的条件下，$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}X_{ni}\to 0$ a. s.，当 $n\to\infty$。

参考文献：

[1] Bradley R C. On the spectral density and asymptotic normality of weakly dependent random fields[J]. Journal of Theoretical Probability, 1992, 5(2): 355-373.

[2] Peligrad M, Gut A. Almost-sure results for a class of dependent random variables[J]. Journal of Theoretical Probability, 1999, 12(1): 87-104.

[3] Gan S X. Almost sure convergence for $\tilde{\rho}$-mixing random variable sequences[J]. Statistics and Probability Letters, 2004, 67(4): 289-298.

[4] 吴群英. ρ 混合序列的若干收敛性质[J]. 工程数学学报，2001，18(3)：58-64.

[5] 吴群英. ρ 混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性[J]. 应用数学，2002，15(1)：1-4.

[6] 吴群英. $\tilde{\rho}$混合线性模型 M 估计的强相合性[J]. 数学物理学报，2005，25(1)：41-46.

[7] 胡学平，桂春燕. $\tilde{\rho}$混合序列部分和的若干收敛性质[J]. 数学杂志，2012，32(3)：521-528.

[8] Guo M L, Dong J, Ren Y. Complete moment convergence of weighted sums for arrays of rowwise ρ^*-mixing random variables[J]. 应用数学，2013，26(1)：18-27.

[9] Shen A T, Hu S H. A note on the strong law of large numbers for arrays of rowwise $\tilde{\rho}$-mixing random variables [J/OL]. http://www.hindawi.com/journals/ddns/2011/430180/.

[10] Utev S, Peligrad M. Maximal inequalities and an invariance principle for a class of weakly dependent random variables[J]. Journal of Theoretical Probability, 2003, 16(1): 101-115.

[11] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京：科学出版社，2006.