

定积分的换元公式

陶志雄

(浙江科技学院 理学院, 杭州 310023)

摘要: 通过延拓变换函数的定义域,并使其保持连续的导函数性质,而其值域不变,证明了高等数学中定积分的一般换元公式,从而弥补了找不到其证明的缺憾。

关键词: 高等数学;定积分;换元法

中图分类号: O172.2

文献标志码: A

文章编号: 1671-8798(2015)03-0165-03

Substitution formula for definite integrals

TAO Zhixiong

(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: By extending the domain of the transformation function such that it has still the same range as the original function, and continuous property of derivative function like the original function, this paper gives a proof of the general substitution rule for definite integrals. It makes up for the deficiency which its proof can not be found.

Key words: advanced mathematics; definite integral; substitution rule

学过高等数学^[1-5]的人都知道高等数学中定积分的换元公式,大多数教科书只介绍如下的定积分变换公式^[1-4]。

命题 假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件:

1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;

2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数,且其值域 $R_\varphi = [a, b]$, 则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

该公式称为定积分的换元公式。

但是,在使用的时候,如当被积函数有具体表达式的时候,并不是完全按照这个公式的条件;换言之,

收稿日期: 2015-04-15

基金项目: 浙江省自然科学基金项目(LY12A01025)

作者简介: 陶志雄(1961—),男,浙江省绍兴人,副教授,博士,主要从事几何拓扑学研究及大学数学教学工作。

使用了更一般的定积分变换公式,即

定理 假设函数 $x=\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有连续导数, $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$ 。 $f(x)$ 在 $\varphi(t)$ 的值域 R_φ 上连续, 则

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx。$$

值得注意的是, 这个定理说明了当值域 R_φ 以 $[a, b]$ (或 $[b, a]$) 为真子集时, 只要被积函数在这个值域是有定义的, 那么命题还是成立的。在菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》和同济大学的《高等数学》等教材^[1-3]中, 都没有正式陈述这个定理, 而是只做了一个注解, 以说明上述定理是正确的, 但都没有给出证明。笔者查了一些资料, 也无法找到有关的证明。因此, 笔者希望通过本研究给出这个定理的一个简单的证明。

证明 设 M, m 分别是 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的最大值和最小值, 且 $a < b$ 。因此, $R_\varphi = [m, M]$, 于是 $m \leq a < b \leq M$ 。对于不同情形, 可将 $x=\varphi(t)$ 进行延拓, 延拓后的函数记为 $g(t)$ 。这样, 在 $[\alpha, \beta]$ 上, $g(t)=\varphi(t)$ 。

若 $m < \varphi(\alpha), \varphi(\beta) < M$, 设

$$K = \begin{cases} M, & \varphi'(\alpha) < 0 \\ m, & \varphi'(\alpha) > 0 \end{cases},$$

在区间 $[\lambda, \alpha]$ ($\lambda < \alpha$) 上构造函数:

$$g(t) = A(t-\alpha)^2 + \varphi'(\alpha)(t-\alpha) + \varphi(\alpha), A = -\frac{\varphi'^2(\alpha)}{4(K-\varphi(\alpha))}。$$

如果 $\varphi'(\alpha) < 0$, 则 $g(t)$ 在区间 $[\lambda, \alpha] = \left[\alpha - \frac{\varphi'(\alpha)}{2A}, \alpha\right]$ 上单调递减, 最大值和最小值分别为 M 和 $\varphi(\alpha)$ 。

如果 $\varphi'(\alpha) > 0$, 则 $g(t)$ 在区间 $[\lambda, \alpha] = \left[\alpha - \frac{\varphi'(\alpha)}{2A}, \alpha\right]$ 上单调递增, 最大值和最小值分别为 $\varphi(\alpha)$ 和 m 。

如果 $\varphi'(\alpha) = 0$, 则取 $g(t) = (t-\alpha)^2 + \varphi(\alpha)$, 则它在 $[\lambda, \alpha] = [\alpha - \sqrt{M-\varphi(\alpha)}, \alpha]$ 上单调递减, 最大值和最小值分别为 M 和 $\varphi(\alpha)$ 。

因在 $[\alpha, \beta]$ 上 $g(t) = \varphi(t)$, 所以 $g(\alpha) = \varphi(\alpha), g'(\alpha) = \varphi'(\alpha)$ 。

同样地, 在区间 $[\beta, \omega]$ 上构造 $g(t)$, 即在该区间上:

若 $\varphi'(\beta) > 0$, 则构造可导函数 $g(t)$ 在该区间上为连续单调递增函数, 且最大值为 $M = \varphi(\omega), \beta < \omega, g(\beta) = \varphi(\beta), g'(\beta) = \varphi'(\beta)$ 。

若 $\varphi'(\beta) < 0$, 则构造 $g(t)$ 在该区间上为连续单调递减函数, 且最小值为 $m = \varphi(\omega), \beta < \omega, g(\beta) = \varphi(\beta), g'(\beta) = \varphi'(\beta)$ 。

若 $\varphi'(\beta) = 0$, 则构造 $g(t)$ 在该区间上为连续单调递增函数, 最大值为 $M = \varphi(\omega), \beta < \omega, g(\beta) = \varphi(\beta), g'(\beta) = \varphi'(\beta)$ 。

容易说明 $g(t)$ 在 $[\lambda, \omega]$ 上连续可导。

如果 $\varphi'(\alpha) < 0$, 根据命题, 设 $\varphi(\zeta) = m$, 有

$$\begin{aligned} \int_M^m f(x)dx &= \int_{\alpha - \frac{\varphi'(\alpha)}{2A}}^{\zeta} f(g(t))g'(t)dt = \\ &= \int_{\alpha - \frac{\varphi'(\alpha)}{2A}}^{\alpha} f(g(t))g'(t)dt + \int_{\alpha}^{\zeta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \\ &= \int_M^{\alpha} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\zeta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \int_a^m f(x)dx = \int_a^{\zeta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt。 \quad (1)$$

若 $\varphi'(\beta) > 0$, 则

$$\begin{aligned}\int_m^M f(x) dx &= \int_{\zeta}^{\omega} f(g(t)) g'(t) dt = \\ &= \int_{\zeta}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt + \int_{\beta}^{\omega} f(g(t)) g'(t) dt = \\ &= \int_{\zeta}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt + \int_b^M f(x) dx,\end{aligned}$$

所以
$$\int_m^b f(x) dx = \int_{\zeta}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (2)$$

式(2)和式(1)相加得

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\zeta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt + \int_{\zeta}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_a^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

若 $\varphi'(\beta) < 0$, 设 $M_1 = g(c)$ 是 $g(t)$ 在 $[\zeta, \omega]$ 上的最大值, 则 $\zeta < c \leq \beta$ 且

$$\begin{aligned}\int_m^{M_1} f(x) dx &= \int_{\zeta}^c f(g(t)) g'(t) dt, \\ \int_{M_1}^m f(x) dx &= \int_c^{\omega} f(g(t)) g'(t) dt = \\ &= \int_c^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt + \int_{\beta}^{\omega} f(g(t)) g'(t) dt = \\ &= \int_c^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt + \int_b^m f(x) dx,\end{aligned}$$

故
$$\int_{M_1}^b f(x) dx = \int_c^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

于是

$$\begin{aligned}\int_m^b f(x) dx &= \int_m^{M_1} f(x) dx + \int_{M_1}^m f(x) dx = \\ &= \int_{\zeta}^c f(g(t)) g'(t) dt + \int_c^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt = \\ &= \int_{\zeta}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt.\end{aligned} \quad (3)$$

余下的讨论同上。

若 $\varphi'(\beta) = 0$, 讨论也和上述一样。

对于 $\varphi'(\alpha) > 0$ 或者 $\varphi'(\alpha) = 0$, 讨论也相似于 $\varphi'(\alpha) < 0$ 的情形。

通过以上证明, 容易证明以下情形:

- 1) $m < \varphi(\alpha) = a < M, M = \varphi(\beta) = b$;
- 2) $a = \varphi(\alpha) = m, m < b = \varphi(\beta) < M$ 。

定理也是成立的。

从以上证明容易得到: 当 $b < a$ 时, **定理**也是正确的。

参考文献:

- [1] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程[M]. 8版. 杨弢亮, 叶彦谦, 徐献瑜, 等, 译. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [2] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 6版. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [3] 朱婉珍, 陶祥兴. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [4] 芬尼, 韦尔, 吉尔当诺. 托马斯微积分[M]. 10版. 叶其孝, 王耀东, 唐兢, 译. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [5] 陈辉, 胡耀华. 定积分概念的另一种引入方式[J]. 高等数学研究, 2012, 15(6): 39-42.