浙江科技学院学报，第 28 卷第 3 期，2016 年 6 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 28 No. 3，Jun. 2016

doi：10.3969/j.issn.1671-8798.2016.03.001

奇异鞍点问题的一类迭代算法的半收敛性

周小燕
（浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

摘　要：提出了奇异鞍点问题的一类基于对矩阵的一种带 2 个实参数 α 和 β 的新的分裂的广义的 SOR-like 方法，得到了此方法半收敛的条件，以及最优参数与相应的最优半收敛因子。

关键词：鞍点问题；GSOR-like 方法；半收敛；最优参数
中图分类号：O241.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2016)03-0177-05

On semi-convergence of a generalized SOR-like method for singular augmented systems

ZHOU Xiaoyan
（School of Sciences，Zhejiang University of Science and Technology，Hangzhou 310023，China）

Abstract：A generalized SOR-like method for singular augmented systems based on a new splitting of the iterative matrix with two real parameters α and β is presented. The semi-convergence conditions and the optimal iteration parameters and the corresponding optimal semi-convergence factor of this method are derived.

Keywords：augmented systems；GSOR-like methods；semi-convergence；the optimal parameters

考虑具有以下形式的鞍点问题：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{q} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

式(1)中，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times m}$为对称正定(SPD)矩阵；$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}$(这里假定 $m\geqslant n$)；$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵；向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^{m}$，$\boldsymbol{y},\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^{n}$，$\boldsymbol{b},\boldsymbol{q}$ 是已知向量。

鞍点问题来自于非线性约束最优化(连续 2 次规划问题和内点法)、流体动力学(Stokes 方程)、不可压缩弹性分析、电路分析及结构分析等。鞍点问题的求解与一般的线性方程组求解一样，有直接法和迭代法 2 种。直接法只进行有限步计算，所以，在不计入舍入误差的情况下，可以在有限步求得方程组的精确解，它比较适合阶数较低的线性方程组。迭代法是从解的一个初始估计值开始，逐步对它进行改进，直

收稿日期：2016-04-10
作者简介：周小燕(1976—　)，女，浙江省萧山人，副教授，硕士，主要从事计算数学研究。

到达到所需的精度，理论上说，须经过无限次迭代才能收敛到真解；但实际上，只要用某种度量方式（如残量的范数），当度量的误差已小于某个给定值时，迭代即可终止。当系数矩阵是稀疏矩阵，且方程的阶数较大时，迭代法就比较适合，因为它运算量小，内存需求小。

当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})=n$，即 $\boldsymbol{B}$ 是列满秩矩阵，鞍点问题(1)（式(1)）有唯一解。许多研究者对鞍点问题(1)进行了探讨，构造了大量有效的迭代算法，如 Uzawa 算法[1-3]、SOR-like 法[4-7]、Krylov 子空间法[8-9]、HSS 迭代法[10-11]等。当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})=r<n$，$\boldsymbol{B}$ 是亏秩矩阵，此时鞍点问题(1)是一个奇异的鞍点问题。同样，许多研究者对此也构造了相应的有效算法，如不精确的 Uzawa-like 方法[12-16]、HSS-like 方法[17-19]等。

当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})=n$，文献[7]构造了鞍点问题(1)的 GSOR-like 方法，讨论了此方法的收敛性、最优参数及相应的最小谱半径。本研究讨论当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})=r<n$ 时，GSOR-like 方法的半收敛性。

1 基本概念和引理

用 $\sigma(\boldsymbol{A})$，$\rho(\boldsymbol{A})$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱集和谱半径。

定义 1[20] 设 $\boldsymbol{T}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，当 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{T}^k$ 存在时，称 $\boldsymbol{T}$ 是半收敛的。

引理 1[20] 设 $\boldsymbol{T}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，那么 $\boldsymbol{T}$ 半收敛当且仅当以下条件成立：

1) $\rho(\boldsymbol{T})\leqslant 1$；

2) 如果 $\rho(\boldsymbol{T})=1$，那么矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的特征值 1 的所有初等因子是线性的，即 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})^2=\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})$；

3) 如果 $\rho(\boldsymbol{T})=1$，那么由 $\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T})$，$|\lambda|=1$ 可得到 $\lambda=1$。

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，当 $\boldsymbol{M}$ 可逆时，称 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个分裂。考虑线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，令 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}$，则迭代

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{c} \tag{2}$$

有以下结果。

引理 2[20] 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$，其中 $\boldsymbol{M}$ 是可逆的，记 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}$。那么对于任何初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，迭代(式(2))半收敛于线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一解 $\boldsymbol{x}^*$ 当且仅当 $\boldsymbol{T}$ 是半收敛的，且

$$\boldsymbol{x}^*=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})^{\mathrm{D}}\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{E}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})^{\mathrm{D}}, \tag{3}$$

式(3)中，$\boldsymbol{I}$ 是单位阵，$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})^{\mathrm{D}}$ 是 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}$ 的 Drazin 逆。

引理 3[12] 设 $\boldsymbol{H}\in\mathbb{R}^{l_1\times l_1}$，$\boldsymbol{I}\in\mathbb{R}^{l_2\times l_2}$，$l_1,l_2\in\mathbb{Z}^+$，那么

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{L} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}。 \tag{4}$$

半收敛当且仅当以下条件成立之一：

1) $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{H}$ 是半收敛的；

2) $\rho(\boldsymbol{H})<1$。

2 GSOR-like 方法的半收敛性

方法 1 GSOR-like 方法[7]：

设 $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称非奇异的，$\boldsymbol{x}^{(0)}\in\mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{y}^{(0)}\in\mathbb{R}^n$ 是给定的初始向量，α,β,ω 是实数，满足 $\alpha>0$，$\omega>0$，$\alpha-\omega\beta\neq 0$。对于 $k=0,1,2,\cdots$，计算

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\left(1-\dfrac{\omega}{\alpha-\omega\beta}\right)\boldsymbol{x}^{(k)}+\dfrac{\omega}{\alpha-\omega\beta}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^{(k)}),\\ \boldsymbol{y}^{(k+1)}=\boldsymbol{y}^{(k)}+\omega\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{q}),\end{cases}$$

直到迭代序列 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^{(k+1)}\\ \boldsymbol{y}^{(k+1)}\end{pmatrix}$ 是收敛的。

方法 1 等价于

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{y}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}(\omega,\alpha,\beta)\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(k)} \\ \boldsymbol{y}^{(k)} \end{pmatrix} + \boldsymbol{N}(\omega,\alpha,\beta)\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{q} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

式(5)中，

$$\boldsymbol{M}(\omega,\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \left(1-\dfrac{\omega}{\alpha-\omega\beta}\right)\boldsymbol{I} & -\dfrac{\omega}{\alpha-\omega\beta}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \omega\left(1-\dfrac{\omega}{\alpha-\omega\beta}\right)\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}-\dfrac{\omega^2}{\alpha-\omega\beta}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{N}(\omega,\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\omega}{\alpha-\omega\beta}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \dfrac{\omega^2}{\alpha-\omega\beta}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & \omega\boldsymbol{Q}^{-1} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

式(6)中，$I\in\mathbb{R}^{m\times m}$是单位阵。

当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})=n$，鞍点问题(1)的系数矩阵是非奇异的，因此有唯一的解，文献[7]研究了收敛性质并确定了最优参数。当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})=r<n$，鞍点问题(1)的系数矩阵是奇异的，因此有无穷多解。以下定理表明这种情形下**方法 1** 的半收敛性。

定理 1　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times m}$，$\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为 SPD 矩阵，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})=r<n$，$\rho$ 是 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的最大特征值，那么，对于任何的初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in\mathbb{R}^{m}$，$\boldsymbol{y}^{(0)}\in\mathbb{R}^{n}$，当

$$\begin{cases} 0<\omega<\dfrac{4\alpha}{(1+2\beta)+\sqrt{(1+2\beta)^2+4\rho\alpha}}, \\ \alpha>0,-\infty<\beta<+\infty,\alpha-\omega\beta\neq 0, \end{cases}$$

GSOR-like 方法收敛于奇异鞍点问题(1)的一解 $\boldsymbol{x}^*$。

证明：由**引理 2**，只需证明**方法 1** 的迭代矩阵 $\boldsymbol{M}(\omega,\alpha,\beta)$是半收敛的。

设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{B}_1\quad\boldsymbol{0})\boldsymbol{V}^*$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的奇异值分解，其中

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} \Sigma_r \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times r},\ \Sigma_r=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r), \tag{8}$$

式(8)中，$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的奇异值，那么 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{V} \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$ 是酉阵。定义

$$\hat{\boldsymbol{M}}(\omega,\alpha,\beta)=\boldsymbol{P}^*\boldsymbol{M}(\omega,\alpha,\beta)\boldsymbol{P}, \tag{9}$$

式(9)中，$(.)^*$ 代表复矩阵的共扼转置矩阵，则迭代矩阵 $\boldsymbol{M}(\omega,\alpha,\beta)$酉相似于 $\hat{\boldsymbol{M}}(\omega,\alpha,\beta)$，因此，只需证明矩阵 $\hat{\boldsymbol{M}}(\omega,\alpha,\beta)$是半收敛的。

定义矩阵：

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{U},\hat{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{V},\hat{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{Q}\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{V}_1\quad\boldsymbol{V}_2), \tag{10}$$

式(10)中，$\boldsymbol{V}_1\in\mathbb{R}^{n\times r}$，$\boldsymbol{V}_2\in\mathbb{R}^{n\times(n-r)}$，那么

$$\begin{aligned} &\hat{\boldsymbol{A}}^{-1}=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}, \\ &\hat{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U}(\boldsymbol{B}_1\quad\boldsymbol{0})\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{B}_1\quad\boldsymbol{0}), \\ &\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{V}\hat{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{V}^*,\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{V}\hat{\boldsymbol{Q}}^{-1}\boldsymbol{V}^*, \\ &\hat{\boldsymbol{Q}}^{-1}=\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{V}_1\quad\boldsymbol{V}_2)^*\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{V}_1\quad\boldsymbol{V}_2)= \\ &\quad\begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_1^* \\ \boldsymbol{V}_2^* \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{V}_1\quad\boldsymbol{V}_2)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_1^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{V}_1^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_2 \\ \boldsymbol{V}_2^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{V}_2^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_2 \end{pmatrix}。 \end{aligned}$$

计算可得，

$$\hat{\boldsymbol{M}}(\omega,\alpha,\beta)=\boldsymbol{P}^*\boldsymbol{M}(\omega,\alpha,\beta)\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{G}}(\omega,\alpha,\beta) & \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{H}}(\omega,\alpha,\beta) & \boldsymbol{I}_{n-r} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

式(11)中，

$$\hat{\boldsymbol{G}}(\omega,\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} \left(1-\dfrac{\omega}{\alpha-\omega\beta}\right)\boldsymbol{I}_m & -\dfrac{\omega}{\alpha-\omega\beta}\hat{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{B}_1 \\ \omega\left(1-\dfrac{\omega}{\alpha-\omega\beta}\right)\boldsymbol{V}_1^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_r-\dfrac{\omega^2}{\alpha-\omega\beta}\boldsymbol{V}_1^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{H}}(\omega,\alpha,\beta)=\left(\omega\left(1-\frac{\omega}{\alpha-\omega\beta}\right)\boldsymbol{V}_2^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}-\frac{\omega^2}{\alpha-\omega\beta}\boldsymbol{V}_2^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\hat{A}^{-1}\boldsymbol{B}_1\right)。$$

由**引理 3**知，$\hat{\boldsymbol{M}}_\omega$ 半收敛当且仅当 $\rho(\hat{\boldsymbol{G}}(\omega,\alpha,\beta))<1$。

$\hat{\boldsymbol{G}}(\omega,\alpha,\beta)$可以看成是非奇异鞍点问题

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} \\ \hat{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{b}} \\ \hat{\boldsymbol{q}} \end{pmatrix} \tag{12}$$

的 GSOR-like 方法[7]的迭代矩阵。定义：$\hat{\boldsymbol{Q}}_1=(\boldsymbol{V}_1^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1)^{-1}$，则$\hat{\boldsymbol{Q}}_1$ 为预处理矩阵，向量 $\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{b}}\in\mathbb{R}^m$，$\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{q}}\in\mathbb{R}^r$。由文献[7]462 的定理 1 知，$\rho(\hat{\boldsymbol{G}}(\omega,\alpha,\beta))<1$ 当且仅当

$$\begin{cases} 0<\omega<\dfrac{4\alpha}{(1+2\beta)+\sqrt{(1+2\beta)^2+4\rho\alpha}}, \\ \alpha>0,-\infty<\beta<+\infty,\alpha-\omega\beta\neq 0, \end{cases} \tag{13}$$

式(13)中，ρ 是非奇异矩阵 $\hat{Q}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{A}}^{-1}\hat{\boldsymbol{B}}_1$ 的最大特征值。

因为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}^*(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{V}=&(\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U})(\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U})(\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{V})= \\ &\begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_1^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{V}_1^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_2 \\ \boldsymbol{V}_2^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{V}_2^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}^{-1}(\boldsymbol{B}_1 \quad \boldsymbol{0})= \\ &\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{Q}}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{V}_2^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}。 \end{aligned} \tag{14}$$

所以，ρ 同时也是 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的最大特征值。证毕。

3 最优迭代参数

由**定理 1** 的证明知，**方法 1** 的迭代矩阵 $\boldsymbol{M}(\omega,\alpha,\beta)$酉相似于下三角分块矩阵 $\hat{\boldsymbol{M}}(\omega,\alpha,\beta)$，它的对角块是 $\hat{\boldsymbol{G}}(\omega,\alpha,\beta)$和 $\boldsymbol{I}_{n-r}$，其中的 $\hat{\boldsymbol{G}}(\omega,\alpha,\beta)$可以看成是非奇异鞍点问题(式(12))的 GSOR-like 方法[7]的迭代矩阵，$\hat{\boldsymbol{Q}}_1=(\boldsymbol{V}_1^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1)^{-1}$为相应的预处理矩阵。因此，通过文献[7]465 中的定理 2，可以得到当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})=r<n$ 时**方法 1** 的最优参数和相应的最优半收敛因子。

定理 2 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times m}$，$\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为 SPD 矩阵，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})=r<n$，$\alpha>0$，$\beta\geqslant-\dfrac{1}{2}$，$\rho$，$\mu_0$ 分别是 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的最大和最小特征值，那么**方法 1** 的最优半收敛因子是

$$\rho_{\mathrm{opt}}=\frac{\sqrt{\rho}-\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\rho}+\sqrt{\mu_0}},$$

最优参数是

$$\alpha_{\mathrm{opt}}=\frac{1+k+2\sqrt{k}(1+2\beta_{\mathrm{opt}})}{4\sqrt{\mu_0}},\beta_{\mathrm{opt}}\geqslant-\frac{1}{2},\omega_{\mathrm{opt}}=\sqrt{\frac{1}{\rho\mu_0}}, \tag{15}$$

式(15)中，$k=\dfrac{\mu_0}{\rho}$。

参考文献：

[1] ELMAN H C, GOLUB G H. Inexact and preconditioned Uzawa algorithms for saddle point problems[J]. Siam Journal on Numerical Analysis, 1994, 31(6):1645.

[2] BRAMBLE J H, PASCIAK J E, VASSILEV A T. Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point

problems[J]. Siam Journal on Numerical Analysis, 1997, 34(3):1072.

[3] BAI Z Z, WANG Z Q. On parameterized inexact Uzawa methods for generalized saddle point problems[J]. Linear Algebra and its Applications,2008,428:2900.

[4] GOLUB G H, WU X, YUAN J Y. SOR-like methods for augmented systems[J]. Bit Numerical Mathematics, 2001, 41(1):71.

[5] BAI Z Z, PARLETT B N, WANG Z Q. On generalized successive overrelaxion methods for augmented linear systems[J]. Numerische Mathematic, 2005,102(1):1.

[6] HUANG Z D, ZHOU X Y. On the minimum convergence factor of a class of GSOR-like methods for augmented systems[J]. Numerical Algorithms, 2015,70(1):113.

[7] ZHOU X Y. A generalized SOR-like method for augmented systems[J]. Journal of Zhejiang University of Science and Technology,2015,27(6):459.

[8] SAAD Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems[M]. 2nd ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

[9] VAN DER VORS H A. Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems[M]// Vol. 13 of Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. New York:Cambridge University Press,2003.

[10] BENZI M, GOLUB G H. A preconditioner for generalized saddle point problems[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,2004, 26(1):20.

[11] BAI Z Z, GOLUB G H. Accelerated Hermitian and skew-Hermitian splitting iteration methods for saddle-point problems[J]. Ima Journal of Numerical Analysis, 2007, 27(1):1.

[12] ZHENG B, BAI Z Z, YANG X. On semi-convergence of parameterized Uzawa methods for singular saddle point problems[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2009,431:808.

[13] ZHANG G F, WANG S S. A generalization of parameterized inexact Uzawa method for singular saddle point problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(9):4225.

[14] CHAO Z, CHEN G. A note on semi-convergence of generalized parameterized inexact Uzawa method for singular saddle point problems[J]. Numerical Algorithms, 2014, 68(1):95.

[15] ZHANGN, LU T T, WEI Y. Semi-convergence analysis of Uzawa methods for singular saddle point problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 255(285):334.

[16] LIANG Z Z, ZHANG G F. Semi-convergence analysis of the GPIU method for singular nonsymmetric saddle-point problems[J]. Numerical Algorithms, 2014, 70(1):151.

[17] BAI Z Z. On semi-convergence of Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for singular linear systems[J]. Computing, 2010, 89:171.

[18] CHAO Z, ZHANG N. A generalized preconditioned HSS method for singular saddle point problems[J]. Numerical Algorithms, 2014, 66(2):203.

[19] WANG S S, ZHANG G F. Preconditioned AHSS iteration method for singular saddle point problems[J]. Numerical Algorithms, 2013, 63(3):521.

[20] BERMAN A, PLEMMONS R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences[M]. Philadelphia :Society for Industrial and Applied Mathematics,1994.