浙江科技学院学报,第 28 卷第 5 期,2016 年 10 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 28 No. 5, Oct. 2016

doi: 10.3969/j. issn. 1671-8798. 2016. 05. 001

中心商同构于 p^6 阶第十九家族的一类 LA-群

陈科成，班桂宁，聂婷婷
(广西大学 数学与信息科学学院,南宁 530004)

摘　要：基于 Rodney James 的 p^6 阶群的完全同构分类理论，继续 LA-群的研究工作。利用群的扩张理论与自由群理论,得到一类中心非循环且中心商同构与 $\Phi_{19}(1^6)$的有限 p-群,最后运用自同构的性质证明了此类群是 LA-群。

关键词：有限 p-群;群的扩张;LA-群;自由群
中图分类号：O152.1　　　**文献标志码**：A　　　**文章编号**：1671-8798(2016)05-0337-07

A class of LA-groups with central quotients being isomorphic to the order of p^6-group of nineteenth family

CHEN Kecheng, BAN Guining, NIE Tingting
(School of Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: Based on the complete isomorphism classification theory of Rodney James's groups of order p^6, we continue to study the LA-group. By using the extension theory of group and the theory of free group, we get a new series of finite p-groups with central non-cyclic and quotients being isomorphic to the group of $\Phi_{19}(1^6)$. Eventually we prove that the groups are new LA-groups by the characteristic of their automorphisms.

Keywords: finite p-group; extension theory of group; LA-group; free group

群论孕育至今极大地推动了数学的发展,有限 p-群是其最重要的分支之一。把满足 $|G|\,|\,|\mathrm{Aut}(G)|$ 且 $|G|=p^n, n>2$ 的有限非循环 p-群定义为 LA-群。在 LA-群及有限 p-群自同构上班桂宁等获得到了一些有价值的成果[1-9]。崔艳证明中心商同构于 $\Phi_{19}(1^6)$ 的一类群是 LA-群[10],但其中心 $Z(G)$ 是循环群。本研究结合 James 关于 p^6 阶群的分类[11]，证明了 $Z(G)$ 是非循环群的限定条件，并证明了在此条件下这类群是 LA-群。

收稿日期：2016-07-21

作者简介：陈科成(1990—　),男，浙江省宁波人,硕士研究生，研究方向为基础数学的有限群论。

1 理论基础

1.1 相关定义

定义 1[12]30 设G是有限群，$\forall a,b\in G$，规定$[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab$，叫作元素a,b的换位子，再令$G'=\langle [a,b]\mid a,b\in G\rangle$，称为$G$的换位子群或导群。此外，规定$G^{(0)}=G$，$G^{(n)}=(G^{(n-1)})'$，$n\geqslant 1$，称$G^{(n)}$为$G$的$n$阶换位子群。

下文群的定义关系中，形如$[a_i,a_j]=1,(i,j=1,2,\cdots,n)$的略去不写。

定义 2[12]139 设G是有限群。若$G\neq 1$，令$\Phi(G)$为G的所有极大子群的交；而若$G=1$，$\Phi(G)=1$，称$\Phi(G)$为G的 Frattini 子群。

定义 3[13]121 设G是群，$a,b\in G$，i,j为正整数，规定：

$$[ia,jb]=[a,b,\underbrace{a,\cdots,a}_{i-1},\underbrace{b,\cdots,b}_{j-1}]。$$

定义 4[14] 若群G是非交换且没有非平凡交换直积因子的p-群，则称群G是 PN-群。

本研究所用的群论符号或基础定义皆可参考文献[12]。

1.2 主要引理

引理 1[12]130 设G是群，$a,b,c\in G$，则

1)$a^b=a[a,b]$；

2)$[a,b]^c=[a^c,b^c]$；

3)$[a,b]^{-1}=[b,a]=[a,b^{-1}]^b=[a^{-1},b]^a$；

4)$[ab,c]=[a,c]^b[b,c]$；

5)$[a,bc]=[a,c][a,b]^c$。

引理 2[13]123 设G是群，$a,b\in G$且$[a,b]\in Z(G)$，又设n是正整数，则有

1)$[a^n,b]=[a,b]^n$，$[a,b^n]=[a,b]^n$；

2)$(ab)^n=a^nb^n[b,a]^{\binom{n}{2}}$；

3)$(ab^{-1})^m=a^m\prod\limits_{i+j\leqslant m}^{n}[ia,jb]^{\binom{m}{i+j}}b^{-m}$。

引理 3[13]121 设G是亚交换群，$a,b\in G$，设m,n是正整数，则

$$[a^m,b^n]=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}[ia,jb]^{\binom{m}{i}\binom{n}{j}}。$$

引理 4[12]109 设N群，又设$z\in N,\tau\in \mathrm{Aut}(N)$，$z$与$\tau$满足$z^{\tau}=z,\tau^m=z$，则由式$f(s^i,s^j)=\begin{cases}1,i+j<m\\ z,i+j\geqslant m\end{cases}$与式$\alpha(s^i)=\tau^i,i=0,1,\cdots,m-1$确定的$f$和$\alpha$满足。因而可得一个$N$被$F$的扩张$G$(简称$N$的$m$次循环扩张)，记$G=\mathrm{Ext}(N,m;z,\tau)$。

下文提到的 schreier 扩张只是表示这种循环扩张。

引理 5[15] 对于群$G=\langle a_1,a_2,\cdots,a_r\mid f_i(a_1,a_2,\cdots,a_r)=1,i\in I\rangle$。

1) 如果$\sigma\in \mathrm{Aut}(G)$，并且$\forall i\in I,f_i(\sigma(a_1),\sigma(a_2),\cdots,\sigma(a_r))=1$；

2) 如果$\sigma:a_i\rightarrow a'_i$对关系$f_i(a'_1,a'_2,\cdots,a'_r)=1,\forall i\in I$成立，还有$G=\langle a'_1,a'_2,\cdots,a'_r\rangle$，那么$\sigma$可以扩充为$G$的自同构。

引理 6[16] 设G是由生成元$x_1,x_2,\cdots,x_r$和关系$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_r),i\in I$所定义的群，$H=\langle a_1,a_2,\cdots,a_r\rangle$(这些$a_i$可能相同)，$\forall i\in I,f_i(a_1,a_2,\cdots,a_r)=1$，则存在唯一的满同态$\sigma:G=F_r/N\rightarrow H$使得$x_iN\mapsto a_i$，其中$F_r=\langle x_1,x_2,\cdots,x_r\rangle$为自由群，$Y=\langle\{f_i(x_1,x_2,\cdots,x_r),i\in I\}\rangle$，$N=Y^{F_r}$($Y$在$F_r$中的正规

闭包)。

如果 $|G| \leqslant |H| < +\infty$，则上述 σ 为群同构(即 H 是由生成元 $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ 与定义关系 $f_i(a_1, a_2, \cdots, a_r) = 1, \forall i \in I$ 所定义的群)。

引理 7[17]　若 G 是 PN-群，则 $R(G) = A_c(G)\mathrm{Inn}(G)$ 为 p-群。

引理 8[18]　若 G 是 PN-群，则 $|R(G)| = |G/Z_2(G)| \cdot |A_c(G)|$。

设 G 是有限群，$N \leqslant G$，$A_N(G) = \{\sigma \mid g^{-1}g^{\sigma} \in N, \sigma \in \mathrm{Aut}(G)\}$，则 $A_N(G) \leqslant \mathrm{Aut}(G)$，称 $A_N(G)$ 是群 G 的 N-自同构。特别地，记 $A_c(G) = A_{Z(G)}(G)$。

引理 9　如果 $Z(G) \leqslant \Phi(G)$，那么 G 为 PN-群。

证明　用反证法。假设群 $G = H \times \langle h \rangle, H/\Phi(H) = \langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle \times \cdots \times \langle z_n \rangle \cong Z_p^*$，$|h| = p^{\alpha}, \alpha \geqslant 1$，从而 $\Phi(\langle h \rangle) = \langle h^p \rangle$，$G/\Phi(G) = \dfrac{G}{\Phi(H) \times \Phi(\langle h \rangle)} = \langle \bar{z}_1 \rangle \times \cdots \times \langle \bar{z}_n \rangle \times \langle \bar{h} \rangle$，则与 $h \notin \Phi(G)$ 相矛盾。故假设不成立，即 G 为 PN-群。

2　主要定理及证明

2.1　定理 1 的证明

定理 1　设 G 是有限 p-群，$Z = \langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle \times \cdots \times \langle z_n \rangle, n \geqslant 2, o(z_l) = p^{k_l}$ 为 G 的非循环中心，如果 $G/Z \cong \Phi_{19}(1^6)$，则 G 的形式为：$G = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2, z_l \mid [\beta, \alpha_i] = \beta_i, [\alpha_1, \alpha_2] = \beta, [\alpha, \alpha_1] = \beta_1 \prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{a_l p^{k_l - 1}}, [\alpha, \alpha_2] = \prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{b_l p^{k_l - 1}}, [\alpha, \beta] = [\beta_1, \alpha_2] = \prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{c_l p^{k_l - 1}}, [\alpha_1, \beta_1] = \prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{d_l p^{k_l - 1}}, [\alpha_1, \beta_2] = \prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{e_l p^{k_l - 1}}, [\alpha_2, \beta_2] = \prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{f_l p^{k_l - 1}}, \alpha^p = \prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{g_l}, \alpha_i^p = \prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{h(i,l)}, \beta_i^p = \beta^p = z_l^{p^{k_l}} = 1 (i = 1, 2) \rangle$，并且 $\log_p |G| = 6 + \sum\limits_{l=1}^{n} k_l$，$d_l + e_l \equiv 0 (\mathrm{mod} p)$，$d_l - c_l \equiv 0 (\mathrm{mod} p)$。其中 $d_l + e_l \equiv 0 (\mathrm{mod} p)$ 和 $d_l - c_l \equiv 0 (\mathrm{mod} p)$ 的限定是根据下述证明第二步 3) 中的换位子结构的需要所决定的。

证明　第一步，设 $\Phi_{19}(1^6) \cong G/Z(G) = \langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\beta}, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2 \mid [\bar{\beta}, \bar{\alpha}_i] = \bar{\beta}_i, [\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2] = \bar{\beta}, [\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_1] = \bar{\beta}_1, \bar{\alpha}_i{}^p = \bar{\alpha}^p = \bar{\beta}^p = \bar{\beta}_i{}^p = \bar{1}, i = 1, 2 \rangle$。现证明群 G 的亚交换性此时是成立的。对于属于非中心的元 $[\beta, \alpha_i]$，$[\alpha_1, \alpha_2]$，$[\alpha, \alpha_1]$，不妨设 $[\beta, \alpha_i] = \beta_i$，$[\alpha_1, \alpha_2] = \beta$，$[\alpha, \alpha_1] = \beta_1 z, z \in Z(G)$。因为 $[\alpha_1, \beta_2], [\alpha_2, \beta_i] \in Z(G)$，$i = 1, 2$，所以 $[\alpha_1, \beta_2] = [\alpha_1, \beta_2]^{\alpha} = [\alpha_1^{\alpha}, \beta_2^{\alpha}] = [\alpha_1, \beta_2][\beta_1^{-1}, \beta_2]$，得到 $[\beta_1^{-1}, \beta_2] = 1$，即 $[\beta_1, \beta_2] = 1$。同理，由 $[\alpha_2, \beta_i] = [\alpha_2, \beta_i]^{\alpha_1}$ 得 $[\beta, \beta_i] = 1$，所以 $G'' = 1$，即 G 是亚交换群。

通过换位子的运算有 $[\alpha, \alpha_2], [\alpha, \beta] \in Z(G)$，所以 $[\alpha, \alpha_2] = [\alpha, \alpha_2]^{\beta}$，$[\alpha, \beta] = [\alpha, \beta]^{\alpha_1}$，得到 $[\alpha, \beta_2] = [\alpha, \beta_1] = 1$。这些为 1 的换位子可以省略，不出现在 G 的群结构中。

因为 $[\alpha, \alpha_2] = [\alpha, \alpha_2]^{\alpha_1} = [\alpha\beta_1, \alpha_2\beta^{-1}]$，所以 $[\alpha, \beta^{-1}][\beta_1, \beta^{-1}][\beta_1, \alpha_2] = 1$；因为 $[\beta_1, \beta^{-1}] = 1$，得到 $[\alpha, \beta^{-1}][\beta_1, \alpha_2] = 1$，即 $[\beta_1, \alpha_2] = [\beta^{-1}, \alpha]$；因为 $[\beta_1, \alpha_2] \in Z(G)$，所以 $[\beta_1, \alpha_2]^{\beta} = [\beta, \alpha_2]$，由**引理 1** 得 $[\beta^{-1}, \alpha]^{\beta} = [\alpha, \beta]$，从而得 $[\beta_1, \alpha_2] = [\alpha, \beta]$。

根据 $\bar{\alpha}_i{}^p = \bar{\alpha}^p = \bar{\beta}^p = \bar{\beta}_i{}^p = \bar{1}$，对于 $z \in Z(G)$ 有 $[\alpha_1^p, \alpha_2] = [(\bar{\alpha}_i z)^p, \alpha_2] = [\bar{\alpha}_i{}^p, \alpha_2] = 1$，根据**引理 3** $[\alpha_1^p, \alpha_2] = \prod\limits_{i=1}^{p} [i\alpha_1, \alpha_2]^{\binom{p}{i}} = [\alpha_1, \alpha_2]^p [2\alpha_1, \alpha_2]^{\binom{p}{2}} = \beta^p$，所以 $\beta^p = 1$；同理，由 $[\beta, \alpha_i^p] = 1$，得 $\beta_i = 1$。

根据**引理 2**，$[\alpha_i, \beta_j] = [\alpha_i, \beta_j^p] = 1$，$[\alpha, \alpha_2]^p = [\alpha, \alpha_2^p] = [\alpha, \beta^p] = 1$，$[\alpha, \beta]^p = 1$，即所有中心元的阶均为 p。于是，可推导群 G 群的结构如**定理 1** 所述。

第二步,做三次扩张。

1) 证明 $G(1)=\langle \alpha,\beta,\beta_1,\beta_2,z_l \mid [\alpha,\beta]=\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{c_l p^{k_l-1}},\alpha^p=\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{g_l},\beta_i^p=\beta^p=z_l^{p^{k_l}}=1\rangle$ 的存在性。以下如果没有特殊说明,l 皆取值为 1 到 n,i 皆取值为 1 到 2。

令 $N=\langle \beta,\beta_1,\beta_2,z_l\rangle$,设 $F=\langle s_1\rangle$ 为 p 循环群,构造群 N 到 N 的映射 τ,$\beta\to\beta'=\beta^{\alpha}=\beta\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{-c_l p^{k_l-1}}$,$\beta_1\to\beta_1'=\beta_1^{\alpha}=\beta_1$,$\beta_2\to\beta_2'=\beta_2$,$z_l\to z_l'=z_l$,且在此映射下有 $\beta'^p=(\beta\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{-c_l p^{k_l-1}})^p=1$,$\beta_i'^p=\beta_i^p=1$,$z_l'^p=z_l^p=1$,得到 $N=\langle \beta,\beta_i',z_1',z_2',\cdots,z_n'\rangle$,故 $\tau\in \mathrm{Aut}(N)$。

根据映射的定义可得 $1^\tau=1$,证明 $\tau^p=1$,因为 $\beta^{\tau^p}=\beta^{\alpha^p}=\beta\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{-pc_l p^{k_l-1}}=\beta$,$\beta_i^{\tau^p}=\beta_i^{\alpha^p}=\beta_i$,$z_l^{\tau^p}=z_l^p=1$,所以 $\tau^p=1$。故由 schreier 扩张,参看**引理 4**,可知存在 p 阶的循环扩张 $G(1)=\mathrm{Ext}(N,p;s_1,\tau)=\langle \alpha,\beta,\beta_1,\beta_2,z_l\rangle$,因此 $G(1)$ 的存在得以证明,且 $\log_p|G(1)|=4+\sum\limits_{l=1}^{n}k_l$。

现证明扩张得到的 $G(1)$ 与 1) 中给出的定义关系一致。

设 $F=\langle x,y,y_1,y_2,z_l\rangle$ 是有 $n+4$ 个生成元的自由群,取关系集 $S=\{[x,z_l],[y_1,y_2],[y,x]\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{c_l p^{k_l-1}}$,$[x,y_i],[y,y_i],[y,z_l],[y_i,z_l],[y_1,y_2],[y_1,z_l],[y_2,z_l],[z_j,z_l],x^{-p}\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{g_l},y^p,y_i^p,z_l^{p^{k_l}}\}$,此时自由群 F 的正规闭包为 $M=S^F$,所以,得到交换群 $\bar{F}=F/M=\langle \bar{x},\bar{y},\bar{y}_i,\bar{z}_l\rangle$,且有 $\bar{F}$ 的一个子群 $\bar{H}=\langle \bar{y},\bar{y}_i,\bar{z}_l\rangle\lhd\bar{F}$,且其生成元满足群 N 的定义关系。于是 $|\bar{F}/\bar{H}|=|\langle \bar{x}\bar{H}\rangle|\leqslant p$,故 $\log_p|\bar{F}|\leqslant 1+\log_p|\bar{H}|\leqslant 4+\sum\limits_{l=1}^{n}k_l=\log_p|G(1)|$,根据**引理 6** 可知,$G(1)\cong\bar{F}$。所以,循环扩张 $G(1)$ 的结构即为群 $G(1)$ 所定义的关系。

2) 证明 $G(2)=\langle \alpha,\alpha_1,\beta,\beta_i,z_l \mid [\alpha,\beta]=\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{c_l p^{k_l-1}},[\beta,\alpha_1]=\beta_1,[\alpha_1,\beta_1]=\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{d_l p^{k_l-1}},[\alpha_1,\beta_2]=\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{e_l p^{k_l-1}},[\alpha,\alpha_1]=\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{a_l p^{k_l-1}},\alpha^p=\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{g_l},\alpha_1^p=\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{h(1,l)},\beta_i^p=\beta^p=z_l^{p^{k_l}}=1\rangle$ 的存在性。

令 $N=G(1)$ 如上文所得,设 $F=\langle s_2\rangle$ 为 p 循环群,构造群 N 到 N 的映射 τ:$\alpha\to\alpha'=\alpha^{\alpha_1}=\alpha\beta_1\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{a_l p^{k_l-1}}$,$\beta\to\beta'=\beta^{\alpha_1}=\beta\beta_1$,$\beta_1\to\beta_1'=\beta_1^{\alpha_1}=\beta_1\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{-d_l p^{k_l-1}}$,$\beta_2\to\beta_2'=\beta_2\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{-e_l p^{k_l-1}}$,$z_l\to z_l'=z_l$,又因为 $[\alpha',\beta']=[\alpha\ \beta_1\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{a_l p^{k_l-1}},\beta\ \beta_1]=[\alpha\ \beta_1,\beta\ \beta_1]=[\alpha,\beta_1]^{\beta_1}[\alpha,\beta]^{\beta^2}[\beta_1,\beta\ \beta_1]=[\alpha,\beta]^{\beta^2}=\prod\limits_{l=1}^{n} z_l'^{c_l p^{k_l-1}}$,满足换位子的条件,且在此映射下 $\alpha'^p=(\alpha\ \beta_1\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{a_l p^{k_l-1}})^p=1$,$\beta'^p=(\beta\ \beta_1)^p=1$,$(\beta_1')^p=(\beta_1\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{-d_l p^{k_l-1}})^p=1$,$z_l'^p=z_l^p=1$,所以 $N=\langle \alpha,\beta',\beta_i',z_1',z_2',\cdots,z_n'\rangle$,故 $\tau\in\mathrm{Aut}(N)$。

根据映射的定义可得 $1^\tau=1$,证明 $\tau^p=1$,因为 $\alpha^{\tau^p}=(\alpha\ \beta_1\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{a_l p^{k_l-1}})^{\alpha_1^p}=\alpha\beta_1^p\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{-d_l\binom{p}{2}p^{k_l-1}}\prod\limits_{l=1}^{n} z_l^{a_l p^{k_l}}=\alpha$,同理计算可得 $\beta^{\tau^p}=\beta^{\alpha_1^p}=\beta$,$\beta_i^{\tau^p}=\beta_i^{\alpha_1^p}=\beta_i$,$z_l^{\tau^p}=z_l^{\alpha_1^p}=z_l$,所以 $\tau^p=1$。故由 schreier 扩张,并且根据**引理 4** 可知存在 p 阶的循环扩张 $G(2)=\mathrm{Ext}(N,p;s_2,\tau)=\langle \alpha,\alpha_1,\beta,\beta_1,\beta_2,z_l\rangle$,因此 $G(2)$ 的存在得以证明且 $\log_p|G(2)|=5+\sum\limits_{l=1}^{n}k_l$。

现证明扩张得到的 $G(2)$ 与 2) 中给出的定义关系一致。

设 $F=\langle x,x_1,y,y_1,y_2,z_l\rangle$ 是 $n+5$ 个生成元的自由群，取关系集 $S=\{[x,z_l],[y_1,y_2],[y,x]\prod_{l=1}^{n} z_l^{c_l p^{k_l-1}},[x,y_i],[y,y_i],[y,z_l],[y_i,z_l],[z_s,z_l],[x_1,y]y_1,[y_1,x_1]\prod_{l=1}^{n} z_l^{d_l p^{k_l-1}},[y_2,x_1]\prod_{l=1}^{n} z_l^{e_l p^{k_l-1}},[x_1,x]y_1\prod_{l=1}^{n} z_l^{a_l p^{k_l-1}},[x_1,z_l],x_1^p=\prod_{l=1}^{n} z_l^{h(1,l)},x^{-p}\prod_{l=1}^{n} z_l^{g_l},y^p,y_i^p,z_l^{p^{k_l}}\}$，此时有自由群 F 的正规闭包为 $M=S^F$，所以得交换群 $\overline{F}=F/M=\langle\bar{x},\bar{x}_1,\bar{y},\bar{y}_i,\bar{z_l}\rangle$。且有 $\overline{F}$ 的一个子群 $\overline{H}=\langle\bar{x},\bar{y},\bar{y}_i,\bar{z_l}\rangle\lhd\overline{F}$，且其生成元满足群 N 的定义关系，于是 $|\overline{F}/\overline{H}|=|\langle\bar{x}_1\overline{H}\rangle|\leqslant p$，故 $\log_p|\overline{F}|\leqslant 1+\log_p|\overline{H}|\leqslant 5+\sum_{l=1}^{n}k_l=\log_p|G(2)|$，根据**引理 6** 可知，$G(2)\cong\overline{F}$。所以循环扩张 $G(2)$ 的结构即为群 $G(2)$ 所定义的关系。

3) 证明群 $G=\langle\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta,\beta_1,\beta_2,z_1,z_2,\cdots,z_n\mid[\beta,\alpha_i]=\beta_i,[\alpha_1,\alpha_2]=\beta,[\alpha,\alpha_1]=\beta_1\prod_{l=1}^{n} z_l^{a_l p^{k_l-1}},[\alpha,\alpha_2]=\prod_{l=1}^{n} z_l^{b_l p^{k_l-1}},[\alpha,\beta]=[\beta_1,\alpha_2]=\prod_{l=1}^{n} z_l^{c_l p^{k_l-1}},[\alpha_1,\beta_1]=\prod_{l=1}^{n} z_l^{d_l p^{k_l-1}},[\alpha_1,\beta_2]=\prod_{l=1}^{n} z_l^{e_l p^{k_l-1}},[\alpha_2,\beta_2]=\prod_{l=1}^{n} z_l^{f_l p^{k_l-1}},\alpha^p=\prod_{l=1}^{n} z_l^{g_l},\alpha_i^p=\prod_{l=1}^{n} z_l^{h(i,l)},\beta_i^p=\beta^p=z_l^{p^{k_l}}=1(i=1,2)\rangle$，且 $\log_p|G|=6+\sum_{l=1}^{n}k_l$，其中部分参数满足 $d_l+e_l\equiv 0(\mathrm{mod}\,p),d_l-c_l\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$ 的存在性。

令 $N=G(2)$ 如上文所得，设 $F=\langle s_3\rangle$ 为 p 循环群，构造群 N 到 N 的映射 τ：

$\alpha\to\alpha'=\alpha^{\alpha_2}=\alpha\prod_{l=1}^{n} z_l^{b_l p^{k_l-1}}$，$\beta\to\beta'=\beta^{\alpha_2}=\beta\beta_2$，$\beta_1\to\beta_1'=\beta_1^{\alpha_2}=\beta_1\prod_{l=1}^{n} z_l^{d_l p^{k_l-1}}$，$\beta_2\to\beta_2'=\beta_2\prod_{l=1}^{n} z_l^{-f_l p^{k_l-1}}$，$z_l\to z_l'=z_l$，$\alpha_1\to\alpha_1'=\alpha_1\beta$。因为 $[\beta',\alpha_1']=[\beta\beta_2,\alpha_1\beta]=\beta_1\prod_{l=1}^{n} z_l^{-e_l p^{k_l-1}}=\beta_1'$ 且 $d_l+e_l\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$，所以 $[\alpha',\alpha_1']=[\alpha,\alpha_1\beta]=\beta_1\prod_{l=1}^{n} z_l^{(c_l+a_l)p^{k_l-1}}=\beta_1'\prod_{l=1}^{n} z_l'^{a_l p^{k_l-1}}$，又因为 $d_l-c_l\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$，同理可以得到：所以 $[\alpha',\beta']=\prod_{l=1}^{n} z_l'^{c_l p^{k_l-1}}$，$[\alpha_1',\beta_1']=\prod_{l=1}^{n} z_l'^{d_l p^{k_l-1}}$，$[\alpha_1',\beta_2']=\prod_{l=1}^{n} z_l'^{e_l p^{k_l-1}}$，满足换位子的条件，且在此映射下有 $\alpha'^p=1$，$(\alpha_1')^p=(\alpha_1\beta)^p=\alpha_1^p\beta^p[\beta,\alpha_1]^{\binom{p}{2}}=1$，$\beta'^p=(\beta\beta_2)^p=1$，$\beta_{i1}'^p=(\beta_i)^p=1$，$z_l'^p=z_l^p=1$，得到 $N=\langle\alpha,\alpha_1,\beta',\beta_i',z_l',\rangle$，故 $\tau\in\mathrm{Aut}(N)$。

根据映射的定义可得 $1^\tau=1$。以下证明 $\tau^p=1$。因为 $\alpha^{\tau^p}=\alpha^{\alpha_2^p}=\alpha\prod_{l=1}^{n} z_l^{b_l p^{k_l}}=\alpha$，同理计算可得 $\beta^{\tau^p}=\beta^{\alpha_2^p}=\beta$，$\beta_i^{\tau^p}=\beta_i^{\alpha_2^p}=\beta_i$，$z_l^{\tau^p}=z_l^{\alpha_2^p}=z_l$，所以 $\tau^p=1$。故由 schreier 扩张，参看**引理 4** 可知存在 p 阶的循环扩张 $G=\mathrm{Ext}(N,p;s_2,\tau)=\langle\alpha,\alpha_i,\beta,\beta_1,\beta_2,z_l\rangle$，因此 G 的存在得以证明且 $\log_p|G|=6+\sum_{l=1}^{n}k_l$。

现证明扩张得到的 G 与 3) 中给出的定义关系一致。

设 $F=\langle x,x_i,y,y_1,y_2,z_l\rangle$ 是 $n+6$ 个生成元的自由群，取关系集 $S=\{[x,z_l],[y_1,y_2],[x,y_i],[y,y_i],[y,z_l],[y_i,z_l],[z_s,z_l],[x_2,y_1]y,[x_2,y]y_2,[y,x]\prod_{l=1}^{n} z_l^{c_l p^{k_l-1}},[x_1,y]y_1,[x_2,x]\prod_{l=1}^{n} z_l^{b_l p^{k_l-1}},[x_2,y_1]\prod_{l=1}^{n} z_l^{a_l p^{k_l-1}},[y_2,x_2]\prod_{l=1}^{n} z_l^{f_l p^{k_l-1}},[y_1,x_1]\prod_{l=1}^{n} z_l^{d_l p^{k_l-1}},[y_2,x_1]\prod_{l=1}^{n} z_l^{e_l p^{k_l-1}},[x_1,x]y_1\prod_{l=1}^{n} z_l^{a_l p^{k_l-1}},[x_i,z_l],x_i^p=\prod_{l=1}^{n} z_l^{h(i,l)},x^{-p}\prod_{l=1}^{n} z_l^{g_l},y^p,y_i^p,z_l^{p^{k_l}}\}$，此时自由群 F 的正规闭包为 $M=S^F$，所以得交换群

$\overline{F} = F/M = \langle \overline{x}, \overline{x}_i, \overline{y}, \overline{y}_i, \overline{z}_l \rangle$，且有 $\overline{F}$ 的一个子群 $\overline{H} = \langle \overline{x}, \overline{x}_1, \overline{y}, \overline{y}_i, \overline{z}_l \rangle \lhd \overline{F}$ 且其生成元满足群 N 的定义关系，于是 $|\overline{F}/\overline{H}| = |\langle \overline{x}_2 \overline{H} \rangle| \leqslant p$，故 $\log_p |\overline{F}| \leqslant 1 + \log_p |\overline{H}| \leqslant 6 + \sum_{l=1}^{n} k_l = \log_p |G|$，根据**引理 6** 可知，$G \cong \overline{F}$。所以循环扩张 G 的结构即为群 G 所定义的关系。

第三步，确定 $Z(G) = Z = \langle z_l \rangle$，令 $\bar{G} = G/Z$，则 $\bar{G} = \langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\beta}, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2 \mid [\bar{\beta}, \bar{\alpha}_i] = \bar{\beta}_i, [\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2] = \bar{\beta}, [\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_1] = \bar{\beta}_1$，$\bar{\alpha}_i{}^p = \bar{\alpha}^p = \bar{\beta}^p = \bar{\beta}_i{}^p = \bar{1}, i = 1, 2$。所以有 $Z(\bar{G}) = \langle \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2 \rangle$，又有 $Z(\bar{G}) \leqslant Z(\bar{G})$，所以 $Z(G) \leqslant \langle \beta_1, \beta_2, Z \rangle$。所以对 $\forall g \in Z(G)$，可设 $g = \beta_1{}^{x_1} \beta_2{}^{x_2} z$，其中 $z \in Z$，所以换位子需要满足 $[\alpha, g] = [\alpha_i, g] = [\beta_i, g] = [\beta, g] = 1$，化简可得，$\prod_{l=1}^{n} z_l{}^{(x_2 e_l + x_1 d_l) p^{k_l - 1}} = \prod_{l=1}^{n} z_l{}^{(x_2 f_l - x_1 c_l) p^{k_l - 1}} = 1$，所以有 $x_1 \equiv x_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$，再由 g 的任意性可知，$Z(G) = Z$。

综上三步证明了**定理 1**。

2.2 定理 2 的证明

定理 2 **定理 1** 中所得的群 G 是 LA-群。

证明 因为 $Z_2(G)/Z(G) = Z(G/Z(G)) = Z(\bar{G})$，所以 $Z_2(G) = \langle \beta_1, \beta_2, Z(G) \rangle$，进而 $\log_p |G/Z_2(G)| = 4$。令 $J_1(G) = \langle g^p \mid g \in G \rangle$，因为 G 是有限 p 群，则 $\Phi(G) = J_1(G)G'$，所以 $Z(G) \leqslant \Phi(G)$，由**引理 9** 得 G 是 PN-群。

令 $\sigma \in A_c(G)$，则可设 $\alpha' = \alpha^\sigma = u\alpha, \alpha_i{}' = \alpha_i^\sigma = u_i \alpha_i, z_l{}' = z_l^\sigma = v_l z_l$，其中 $u_j, v_l u \in Z(G), \beta' = \beta^\sigma = [\alpha_1, \alpha_2]^\sigma = \beta, \beta_i{}' = \beta_i^\sigma = [\beta, \alpha_i]^\sigma = \beta_i$，因为满足换位子和幂结构，$[\alpha', \alpha_1{}'] = \beta_1{}' \prod_{l=1}^{n} z_l{}'^{a_l p^{k_l - 1}}$，$[\alpha', \alpha_2{}'] = \prod_{l=1}^{n} z_l{}'^{b_l p^{k_l - 1}}$，$[\alpha', \beta'] = [\beta_1{}', \alpha_2{}'] = \prod_{l=1}^{n} z_l{}'^{c_l p^{k_l - 1}}$，$[\alpha_1{}', \beta_1{}'] = \prod_{l=1}^{n} z_l{}'^{d_l p^{k_l - 1}}$，$[\alpha_1{}', \beta_2{}'] = \prod_{l=1}^{n} z_l{}'^{e_l p^{k_l - 1}}$，$[\alpha_2{}', \beta_2{}'] = \prod_{l=1}^{n} z_l{}'^{f_l p^{k_l - 1}}$，$\alpha'^p = \prod_{l=1}^{n} z_l{}'^{g_l}$，$\alpha_i{}'^p = \prod_{l=1}^{n} z_l{}'^{h(i,l)}$，则 $\prod_{l=1}^{n} v_l{}^{a_l p^{k_l - 1}} = \prod_{l=1}^{n} v_l{}^{b_l p^{k_l - 1}} = \prod_{l=1}^{n} v_l{}^{c_l p^{k_l - 1}} = \prod_{l=1}^{n} v_l{}^{d_l p^{k_l - 1}} = \prod_{l=1}^{n} v_l{}^{e_l p^{k_l - 1}} = \prod_{l=1}^{n} v_l{}^{f_l p^{k_l - 1}} = 1$，且 $u^p = \prod_{l=1}^{n} v_l{}^{g_l}, u_i^p = \prod_{l=1}^{n} v_l^{h(i,l)}$，又有 $z_l{}'^{p^{k_l - 1}} = 1$，所以 $v_l{}^{p^{k_l}} = 1$。若 $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_n$，则 $v_1 = z_1^{r(1,1)} z_2^{r(1,2)} \cdots z_n^{r(1,n)}$，$v_2 = z_2^{r(2,1) p^{k_1 1 - k}} z_2^{r(2,2)} \cdots z_n^{r(n,2)}$，同理得到 $v_n = z_1^{r(n,1) p^{k_1 - k_n}} z_2^{r(n,2) p^{k_2 - k_n}} \cdots z_n^{r(n,n)}$。

现不妨设 $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_r > 1 = k_{r+1} = \cdots = k_n$，则有 $v_1 = z_1^{s(1,1)p} z_2^{s(1,2)p} \cdots z_r^{s(1,r)p}$，$v_2 = z_1^{s(2,1) p^{k_1 - k_2 + 1}} z_2^{s(2,2)p} \cdots z_r^{s(1,r)p}, \cdots, v_n = z_1^{s(r,1) p^{k_1 - k_r + 1}} z_2^{s(r,2) p^{k_2 - k_r + 1}} \cdots z_r^{s(r,r)p}$，$v_{r+1} = v_{r+2} = \cdots = v_n = 1$。与此同时，$m_1^p = \prod_{l=1}^{n} v_l{}^{g_l}, m_2^p = \prod_{l=1}^{n} v_l{}^{h_l}, m_3^p = \prod_{l=1}^{n} v_l{}^{h_l}$，并且可以设 $u_j = m_j z_1^{t(j,1) p^{k_l - 1}} z_2^{t(j,2) p^{k_l - 1}} \cdots z_r^{t(j,r) p^{k_l - 1}} \cdots z_n^{t(j,n) p^{k_l - 1}}$（取 $j = 1, 2, 3$），于是，根据**引理 6** 可得：$\log_p |A_c(G)| \geqslant (k_1 + k_2 + \cdots + k_r - r) + (2k_2 + k_3 + \cdots + k_r - r) + \cdots + (rk_r - r) + 3n = k_1 + 3k_2 + \cdots + (2r - 1)k_r - r^2 + 3n = 2k_2 + 4k_3 + \cdots + 2(r - 1)k_r - r^2 + r + 2n + \log_p |Z(G)| \geqslant 2\dfrac{1 + (r - 1)}{2}(r - 1)k_r - r(r - 1) + 2n + \log_p |Z(G)| \geqslant 2n + \log_p |Z(G)|$。

群 G 的一个自同构群 $R(G)$，由**引理 7** 和**引理 8** 可知，$|R(G)| = |G/Z_2(G)| \cdot |A_c(G)|$，从而 $\log_p |R(G)| \geqslant 4 + 2n + \log_p |Z(G)|$。因为 $\log_p |G| = 6 + \log_p |Z(G)|$，所以当 $n \geqslant 2$ 时，有 $\log_p |R(G)| \geqslant \log_p |G|$，即 $|G| \mid |\mathrm{Aut}(G)|$，从而此时 G 是 LA-群。当 $n = 1$ 时，$\log_p |R(G)| \geqslant 6 + \log_p |Z(G)| \geqslant \log_p |G|$，综上得 G 是 LA-群。

参考文献：

[1] BAN G，ZHANG J，YU S X. The lower bound for the order of the automorphism groups[J]. Proceedings of the Royal Irish Academy，1996，96A(2)：159.

[2] 班桂宁，陈立英，周宇. 一系列新的 LA-群(英文)[J]. 广西师范学院学报(自然科学版)，2007，24(4)：5.

[3] SHABANI-ATTAR M. On equality of order of a finite p-group and order of its automorphism group[J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society，2015，38(2)：461.

[4] 班桂宁，刘海林，崔艳. 中心循环且中心商群的阶为 p^6 的 LA-群[J]. 重庆理工大学学报(自然科学)，2014，28(1)：120.

[5] 钟祥贵. 一类有限群的自同构群阶的上确界[J]. 广西科学，2002，9(1)：16.

[6] 张中健，班桂宁，戴琳. 一类特殊 p-群的自同构的阶[J]. 云南民族大学学报(自然科学版)，2011，20(1)：37.

[7] 班桂宁，许永峰，陈倩，等. 一类中心商同构于第四十家族的 LA-群[J]. 贵州大学学报(自然科学版)，2015，32(1)：1.

[8] 田甜. 非循环中心商群同构于若干阶族群的 LA-群[D]. 南宁：广西大学，2016.

[9] 班桂宁，周宇，陈立英. 一类特殊 p-群自同构群的结构[J]. 郑州大学学报(理学版)，2008，40(1)：52.

[10] 崔艳. 若干中心是循环的 LA-群[D]. 南宁：广西大学，2014.

[11] JAMES R. The groups of order p^6 (p an odd prime)[J]. Mathematics of Computation，1980，34：630.

[12] 徐明曜. 有限群导引(上)[M]. 2 版. 北京：科学出版社，2001.

[13] 徐明曜. 有限群导引(下)[M]. 2 版. 北京：科学出版社，2001.

[14] EXARCHAKOS T. LA-groups[J]. Journal of the Mathematical Society of Japan，1981，33(2)：185.

[15] 班桂宁，俞曙霞. 交换自同构群的一个重要结论[J]. 中国科学(A 辑)，1996，26(12)：1072.

[16] 班桂宁，俞曙霞. 一类 p-群的自同构群的阶[J]. 数学学报，1992，35(4)：570.

[17] OTTO A D. Central automorphisms of a finite p-group[J]. Transactions of the American Mathematical Society，1966，125(2)：282.

[18] 许永峰. 一类中心非循环且中心商群的阶为 p^6 的 LA-群[D]. 南宁：广西大学，2015：10.