

密切接触的非赫兹接触应力

楼 易, 刘 鹄然

(浙江科技学院 机械与汽车工程学院, 杭州 310023)

摘 要: 由于赫兹接触理论只适用于两曲面曲率不同的情形, 当两曲面曲率相同时公式无效, 必须采用新的方法。针对密切接触曲面, 提出密切接触下的接触应力计算方法。首先把密切曲面展开成四阶级数的形式, 然后利用契贝谢夫正交多项式转换成契贝谢夫级数的形式。根据接触应力与接触位移的对应关系, 求出接触应力的分布规律, 确定接触区宽度等对应参数。又针对具体的椭圆形密切接触曲面, 举例计算了接触应力的分布函数, 用计算机图形曲线描述了压力分布的规律, 探讨了密切接触区的形成机制和载荷性能。

关键词: 弹性; 密切接触; 接触应力; 非赫兹应力

中图分类号: TH123.4; TH133.33

文献标志码: A

文章编号: 1671-8798(2016)05-0350-07

Contact stress of non-Hertz in close contact

LOU Yi, LIU Huran

(School of Mechanical and Automotive Engineering, Zhejiang University of Science and Technology,
Hangzhou 310023, China)

Abstract: Hertz contact theory can be applied to the cases when the two curvatures are different. Thus if the curvatures of the contact surfaces are identical, the formula is invalid. For the close contact surface, the contact stress calculation method under close contact is proposed. First, the close surface is expanded into the form of fourth-order series, and then converted into the Chebyshev series by the Chebyshev orthogonal polynomial. According to the correspondence between the contact stress and the contact displacement, the contact stress distribution law is determined, and the corresponding parameters such as contact width are determined. The distribution function of contact stress is calculated by the close contact between ellipse and circular surface. The distribution of pressure distribution is described by computer graphics curve. The forming mechanism and load performance of close contact area are discussed.

Keywords: elasticity; close contact; contact stress; non-Hertz stress

收稿日期: 2016-02-23

基金项目: 清华大学摩擦学国家重点实验室开放基金项目(SKLTKF14A06); 华中科技大学数字制造装备与技术国家重点实验室开放课题(DMETKF2015016)

作者简介: 楼 易(1959—), 男, 浙江省杭州人, 副教授, 硕士, 主要从事机械原理、材料等研究。

20 世纪机械领域两大划时代学术成就是赫兹应力和雷诺动压润滑^[1-2]。以往文献一般研究已有相互接触的曲面应力,较少考虑改变接触面本身,即只研究给定形状下的接触应力^[3-5]。本研究探讨了密切曲面的接触应力计算问题,证明了这种方法创立的曲面在接触应力和接触强度上的优越性。

1 契贝谢夫正交多项式

契贝谢夫正交多项式是多项式中的一种,可用作计算平面接触应力,类似于数学中的傅里叶级数。零阶、一阶、二阶直到四阶的契贝谢夫正交多项式依次为: $T_0(t) = 1, T_1(t) = t^2, T_2(t) = 2t^2 - 1, T_3(t) = 4t^3 - 3t, T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$ 。

2 密切接触曲面的构造

如果

$$R_i = 0.5D_w, \quad (1)$$

式(1)中: R_i 为密切接触轴承的滚珠半径; D_w 为滚道的直径。要让曲率半径相等,则滚珠的半径要等于滚道直径的一半,此时无法用赫兹接触公式来计算,必须用密切接触曲面来分析。

设相接触表面是一个 4 次抛物线

$$y = k_2 x^2 + k_4 x^4, \quad (2)$$

式(2)中: k_2, k_4 为 4 次抛物线的系数。设 l 为接触区宽度,在四阶接触的情况下必有 $k_2 = 0$, 令曲线方程无量纲化:

$$\begin{aligned} \eta = \frac{y}{l} &= l^3 k_4 \frac{x^4}{l^4} = l^3 k_4 t^4 = \sum_{n=0}^4 b_n T_n(t) = \\ &= b_0 T_0(t) + b_1 T_1(t) + b_2 T_2(t) + b_3 T_3(t) + b_4 T_4(t) = \\ &= b_0 + b_1 t + b_2 (2t^2 - 1) + b_3 (4t^3 - 3t) + b_4 (8t^4 - 8t^2 + 1) = \\ &= b_0 + b_1 t + 2b_2 t^2 - b_2 + 4b_3 t^3 - 3b_3 t + 8b_4 t^4 - 8b_4 t^2 + b_4 = \\ &= (b_0 + b_4 - b_2) + (b_1 - 3b_3)t + (2b_2 - 8b_4)t^2 + 4b_3 t^3 + 8b_4 t^4. \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)中: $b_0 \sim b_4$ 为曲线展开的契贝谢夫正交多项式的系数; t 为 x 的无量纲参数, $t = \frac{x}{l}$, 当 $0 < x < l$ 时, $0 < t < 1$, 这样无论 l 等于多少, t 都在 0 与 1 之间; η 为 y 的无量纲参数。

比较系数: $b_0 + b_4 - b_2 = 0, b_1 - 3b_3 = 0, 2b_2 - 8b_4 = 0, 4b_3 = 0$, 可以得到: $8b_4 = l^3 k_4, b_4 = \frac{l^3}{8} k_4, b_2 = 4b_4 = \frac{l^3}{2} k_4, b_3 = 0, b_1 = 0$ 。

压力分布 $p(t)$ 用契贝谢夫多项式表示, 由于

$$(1 - t^2)^{\frac{1}{2}} p(t) = \sum_{n=0}^4 a_n T_n(t), \quad (4)$$

式(4)中: $a_0 \sim a_4$ 为压力展开的契贝谢夫正交多项式的系数。

当 $t = \pm 1$ 时, $1 - t^2 = 0$ 。 故:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^4 a_n T_n(t) &= 0, \\ (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} p(t) &= \sum_{n=0}^4 a_n [T_n(t) - T_n(1)] = \\ &= a_0 [T_0(t) - T_0(1)] + a_2 [T_2(t) - T_2(1)] + a_4 [T_4(t) - T_4(1)]. \end{aligned}$$

又因为 $T_2(t) - T_2(1) = 2(t^2 - 1), T_4(t) - T_4(1) = (8t^4 - 8t^2 + 1) - (8 - 8 + 1) = 8t^2(t^2 - 1)$, 故有:

$$(1 - t^2)^{\frac{1}{2}} p(t) = 2a_2(1 - t^2) + 8a_4 t^2(1 - t^2), \quad (5)$$

$$p(t) = 2a_2 \sqrt{1 - t^2} + 8a_4 t^2 \sqrt{1 - t^2}. \quad (6)$$

式(5)和式(6)中: $a_2 = 2\theta^{-1}b_2 = 2\theta^{-1}\frac{l^3}{2}k_4 = \theta^{-1}l^3k_4$; $a_4 = 4\theta^{-1}b_4 = \theta^{-1}\frac{l^3}{2}k_4$; θ 为弹性系数。因此,压力 $p(t)$ 可表示为:

$$p(t) = 2\theta^{-1}l^3k_4\sqrt{1-t^2} + 8\theta^{-1}\frac{a^3}{2}k_4t^2\sqrt{1-t^2} = 2\theta^{-1}l^3k_4(\sqrt{1-t^2} + 2t^2\sqrt{1-t^2}).$$

换回实际有量纲的量:

$$p(x) = 2\theta^{-1}l^3k_4\left[\sqrt{1-\left(\frac{x}{l}\right)^2} + 2\frac{x^2}{l^2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{l}\right)^2}\right] = 2\theta^{-1}k_4(l^2\sqrt{l^2-x^2} + 2x^2\sqrt{l^2-x^2}). \quad (7)$$

式(7)是本研究最核心的公式。后面的参数确定、举例计算、图形绘制和结论分析都围绕该公式。但式(7)只是一个通用公式,反映应力变化规律,还涉及一系列参数,所以要先确定这些参数,并代入具体数字后才能描绘出来。

总压力要通过对式(7)的积分来求得:

$$F = \int_{-l}^l p(x)dx = 2\theta^{-1}k_4\left(l^2\int_{-l}^l \sqrt{l^2-x^2}dx + 2\int_{-l}^l x^2\sqrt{l^2-x^2}dx\right). \quad (8)$$

式(8)中的 2 个积分可分别计算,前 1 个积分:

$$\int_{-l}^l \sqrt{l^2-x^2}dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{l^2-x^2} + \frac{l^2}{2}\arcsin\frac{x}{l}\right)\Big|_{-l}^l = 0 + \frac{l^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}l^2.$$

对后一个积分设 $x = l\sin\mu$, 则 $\sqrt{l^2-x^2} = l\cos\mu$, $dx = l\cos\mu d\mu$, 那么, $\int_{-l}^l x^2\sqrt{l^2-x^2}dx$ 可转换成

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} l^4 \sin^2\mu \cos^2\mu d\mu &= l^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2\mu) \cos^2\mu d\mu = \\ l^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\mu d\mu - l^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\mu d\mu &= \\ l^4 \frac{\pi}{2} - l^4 \frac{3\pi}{8} &= \frac{l^4\pi}{8}. \end{aligned}$$

所以总压力

$$F = 2\theta^{-1}k_4\left(\frac{l^4\pi}{2} + \frac{l^4\pi}{4}\right) = 2\theta^{-1}k_4l^4\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}\theta^{-1}k_4l^4\pi. \quad (9)$$

由式(9)可得接触带宽度: $l = \sqrt[4]{\frac{2F\theta}{3\pi k_4}}$, 因此,

$$l^2 = \sqrt{\frac{2F\theta}{3\pi k_4}}. \quad (10)$$

如果知道外力 F 和弹性系数 θ , 由式(10)求 l , 代回到式(7)就求得压力分布规律。

$$p(x) = 2\theta^{-1}k_4(l^2\sqrt{l^2-x^2} + 2x^2\sqrt{l^2-x^2}) = 2\theta^{-1}k_4\left[\sqrt{\frac{2F\theta}{3\pi k_4}}\sqrt{\sqrt{\frac{2F\theta}{3\pi k_4}}-x^2} + 2x^2\sqrt{\sqrt{\frac{2F\theta}{3\pi k_4}}-x^2}\right]. \quad (11)$$

式(11)中的 k_4 要根据实际接触的曲面形状来确定, 即根据实际曲面展开式的四阶系数来确定, k_4 将在 3.1 中求解。由于相接触的是 2 个曲面, 还要考虑两曲面四阶系数的差值。

根据式(11)可知, 压力分布区比传统的赫兹应力更广, 且有 2 个相等的峰值。最大压强即应力分布的最大值: $p_{\max} = 2\sqrt{2}\theta^{-1}k_4l^3 = 2\sqrt{2}\theta^{-1}k_4\left(\frac{2F\theta}{3\pi k_4}\right)^{\frac{3}{4}}$, 即最大应力:

$$p_{\max} = 2\sqrt{2}\left(\frac{k_4}{\theta}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2F}{3\pi}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

3 滚珠与椭圆滚道接触的非赫兹应力计算

以上只是推导,为了说明清楚,现以圆与椭圆的接触为例。

3.1 滚珠的圆形截面的四阶展开

为求式(11)中的 k_4 ,要根据实际接触的曲面形状来确定。分别求两实际曲面展开式的四阶系数。由于相接触的是2个曲面,还要考虑两曲面四阶系数的差值,即通常称四阶诱导曲率。

由麦克劳林展开公式,任何曲线在原点可展为:

$$y = y_0 + y'_0 x + \frac{1}{2} y''_0 x^2 + \frac{1}{6} y'''_0 x^3 + \frac{1}{24} y^{(4)}_0 x^4 + \dots \quad (12)$$

圆的方程:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}。 \quad (13)$$

当 $x = 0$ 时,

$$y_0 = R。$$

对式(13)求导:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}。 \quad (14)$$

由式(13)和式(14)得

$$xy' = -x。 \quad (15)$$

在 origin $x = 0$ 处,

$$y'_0 = 0。 \quad (16)$$

对式(15)再求导:

$$y'^2 + yy'' = -1。 \quad (17)$$

在 origin $x = 0$ 处,

$$y''_0 = -\frac{1}{y_0} = -\frac{1}{R}。 \quad (18)$$

对式(17)再求导:

$$2y'y'' + y'y''' + yy''' = 0。 \quad (19)$$

在 origin $x = 0$ 处,

$$y'''_0 = 0。 \quad (20)$$

对式(19)再求导:

$$3y''^2 + 4y'y''' + yy^{(4)} = 0。$$

在 origin $x = 0$ 处,

$$y^{(4)}_0 = -\frac{3(y''_0)^2}{y} = -\frac{3}{R^3}。 \quad (21)$$

把式(16)的一阶导数、式(18)的二阶导数、式(20)的三阶导数、式(21)的四阶导数值都代入式(12)(不考虑常数项)得:

$$y = -\frac{x^2}{2R} - \frac{x^4}{8R^3} = k_2^{(1)} x^2 + k_4^{(1)} x^4, \quad (22)$$

式(22)中:上角标(1)代表滚珠。

滚珠直径取 6.350 1 mm,比较式(22)与式(2)的系数可得:

$$\begin{cases} k_2^{(1)} = -\frac{1}{2R} = -\frac{1}{6.3501} = -0.15748, \\ k_4^{(1)} = -\frac{1}{8 \times R^3} = -\frac{1}{6.3501^3} = -3.9 \times 10^{-3}. \end{cases} \quad (23)$$

式(23)即圆的四阶展开式的系数。

3.2 椭圆形滚道的四阶展开

椭圆滚道的展开如图 1 所示。同时,为了用 t 代替式(2)中的 x , η 代替式(2)中的 y , 式(2)所表示的按有量纲坐标的曲线变成按无量纲的曲线, 曲线的变化形式如图 2 所示, 未来接触区的宽度在 -1 和 1 之间, 而不是一 a 和 a 之间, 曲线更陡了, 反映了曲线的基准坐标改变后的坐标变换对曲线形式的影响。

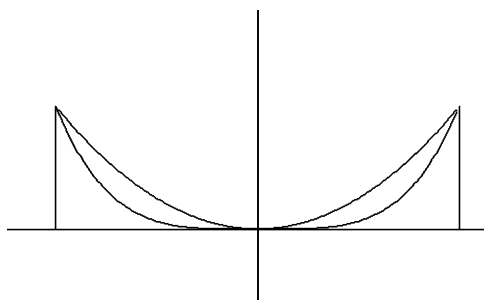


图 1 按有量纲的实际四阶曲线

Fig. 1 Real four-order curve with dimension

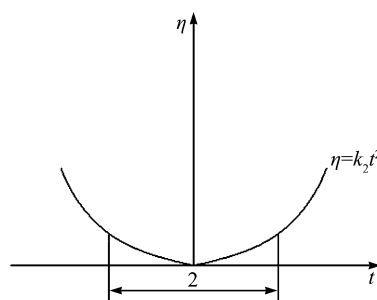


图 2 坐标变换后按无量纲的理论四阶曲线

Fig. 2 Theoretical four-order curve without dimension after transformation

椭圆的方程为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (24)$$

由式(24)可得:

$$y = b \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

对式(25)求导:

$$y' = -b \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{x}{a^2}. \quad (26)$$

由式(26)可得:

$$\begin{aligned} y' b \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} &= -\frac{b^2}{a^2} x, \\ -y' y &= \frac{b^2}{a^2} x. \end{aligned} \quad (27)$$

显然, $y'_0 = 0$ 。

对式(27)式求导:

$$-y'^2 - yy'' = \frac{b^2}{a^2}. \quad (28)$$

在 origin $x = 0$ 处,

$$y''_0 = -\frac{b^2}{a^2 b} = -\frac{b}{a^2}.$$

对式(28)求导:

$$-2y'y'' - y'y''' - yy'''' = 0, \quad (29)$$

在 origin $x = 0$ 处,

$$y'''_0 = 0.$$

对式(29)求导:

$$3y''^2 + 4y'y''' + yy^{(4)} = 0.$$

在 origin $x = 0$ 处,

$$y^{(4)}_0 = -\frac{3y''^2_0}{y_0} = -\frac{3\left(\frac{b}{a^2}\right)^2}{b} = -\frac{3b}{a^4}.$$

设椭圆在长半轴处的展开式:

$$y = k_2^{(2)} x^2 + k_4^{(2)} x^4. \quad (30)$$

式(30)中:上角标(2)代表椭圆。

与该圆相密切且满足其他规范的椭圆半轴分别为 $a = 3.563\ 68, b = 3.999\ 88$, 因此, $k_2^{(2)} = -0.157\ 48$, $k_4^{(2)} = -3.1 \times 10^{-3}$ 。

两个曲面的差曲面

$$\begin{aligned} y &= y_2 - y_1 = k_2^{(2)} x^2 + k_4^{(2)} x^4 - k_2^{(1)} x^2 - k_4^{(1)} x^4 \\ k_2 &= k_2^{(2)} - k_2^{(1)} = -0.157\ 48 - (-0.157\ 48) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

由式(31)可知,圆与椭圆实现密切接触,两曲面四阶展开式的系数差(诱导系数)

$$k_4 = k_4^{(2)} - k_4^{(1)} = -3.1 \times 10^{-3} - (-3.9 \times 10^{-3}) = 0.8 \times 10^{-3}.$$

圆和椭圆都展开了,相应的系数就有了。因二阶系数相等,相互抵消,所以无法用赫兹公式。它们之间的包裹情形如图3所示,在且仅在接触点曲率相等,过了接触点两曲线逐渐分开。这反映了椭圆滚道滚动轴承中滚珠与滚道直接接触的实际接触状况,可以大大改善接触负载。

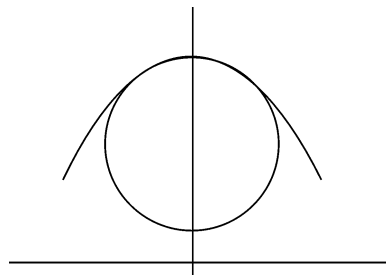


图3 密切包裹时情况

Fig. 3 Situation of close contact

4 选取材料进行计算

内圈滚道和钢球的材料均选取为锻钢,借用常用的接触系数 $Z_E = 189.8\ \text{MPa}^{\frac{1}{2}}$ 来求弹性系数,其量纲为 $\text{MPa}^{\frac{1}{2}}$ 。设 E_1, E_2 是弹性模量, μ_1, μ_2 , 为泊松比是量纲的。则: $E_1 = E_2 = 206\ \text{GPa}, \mu_1 = \mu_2 = 0.3$ 。

因为

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}} = 189.8\ (\text{MPa}^{\frac{1}{2}}),$$

故

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{\pi\theta}} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} Z_E, \\ \sqrt{\pi\theta} &= \frac{\sqrt{2}}{Z_E}, \\ \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} &= \sqrt{\frac{\pi\theta}{\pi^2}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\pi\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\pi Z_E} = 2.373 \times 10^{-3}, \\ \theta &= 1.77 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

式(8)中, F, θ, k_1 均已求出,因此,可以画出接触应力分布曲线(图4)。与二阶接触的接触应力不同的是,最大接触应力不在正中,而是在旁边,有两个极值关于 y 轴对称。两个极值大小相等。

5 密切接触与非密切接触的比较

假定 F, θ 不变,改变曲面参数,比较二阶接触(k_2 不为 0)、普通四阶接触(k_2, k_4 均不为 0)、四阶密切接触(k_2 等于 0)时接触应力最大值与接触区的差别。

取弹性系数 $\theta = 1.77 \times 10^{-5}$, 按赫兹接触应力椭圆半径 $a = 1.5\ \text{mm}$ 计算,当普通二阶接触体的接触带宽度 $l = \sqrt{\frac{F'\theta}{\pi k_2}} = 1.5\ \text{mm}$ 时,可知总压力: $F' = 1\ 836\ \text{N}$ 。

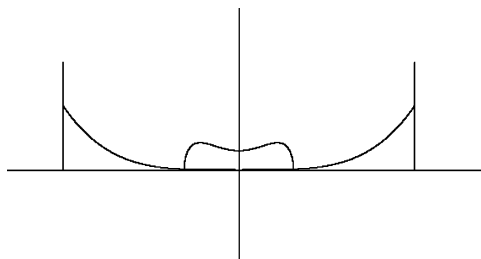


图4 接触应力分布曲线

Fig. 4 Curve of contact stress contribution

二阶接触时最大压强:

$$p_{\max} = 2 \times \sqrt{\frac{F'k_2}{\pi\theta}} = 0.78 \times 10^3 \text{ (MPa)}。$$

普通四阶接触带宽度:

$$L = \sqrt{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4 \times \frac{3}{2}k_4 \frac{F'\theta}{\pi}}}{2 \times \frac{3}{2}k_4}} = 1.26 \text{ (mm)}。$$

普通四阶接触时的最大压强:

$$p_{\max} = 2\theta^{-1}(k_2 + k_4 l a^2)l = 0.84 \times 10^3 \text{ (MPa)}。$$

密切四阶接触体的接触带宽度 $l = \sqrt[4]{\frac{2F'\theta}{3\pi k_4}} = 1.71 \text{ (mm)}$, 大于二阶接触的宽度 1.5 mm。

密切四阶接触体接触时的最大接触应力 $p_{\max} = 2 \times \sqrt[4]{\frac{2k_4^3 F}{3\pi\theta^3}} = 0.15 \times 10^3 \text{ (MPa)}$, 小于二阶接触的最大接触应力 $0.78 \times 10^3 \text{ MPa}$ 。

6 结 语

通过以上计算可以得出,用改变接触体的接触表面形状来改善接触状况是可行的,密切接触面的应力要用非赫兹接触应力的方法来计算,可以使密切接触体的接触面积比以往高副的接触面积大大增加。密切接触体的接触面的接触应力比以往的常规接触曲面大为减少。课题组在研究中曾解决了如何使高副达到密切接触的问题^[6],本研究解决了密切高副的接触应力计算问题,为下一步解决密切高副的润滑等其他问题打下了基础。

参考文献:

- [1] KOMORI T, ARGAY, NAGATA S, et al. A new gears profile having zero relative curvature at many contact points (logix tooth profile)[J]. Journal of Mechanical Design, 1990, 112(3): 430.
- [2] KOMORI T. A new gear profile of relative curvature being zero at contact points[C]// Proceeding of International Conference on gearing. Beijing: CMCC, 1988: 230-236.
- [3] FENG X Y, WANG A Q, LEE L. Study on the design principle of the Logix gear tooth profile and the selection of its inherent basic parameters[J]. International Journal of Advanced Manufacture Technology, 2004, 24(11): 789.
- [4] FENG X Y, WANG A Q, LEE L, et al. Study for the forming principle of Logix gear tooth profile and its mesh performance [J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2002, 41(增刊 1): 91.
- [5] DOONER D B. On the three laws of gearing [J]. Journal of Mechanical Design, 2002, 124(4): 733.
- [6] LIU H R. The extreme efficiency of the new model in milling of complicated surfaces[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2013, 67(9): 2765.