浙江科技学院学报,第29卷第5期,2017年10月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 29 No. 5, Oct. 2017

doi: 10.3969/j.issn.1671-8798.2017.05.012

多元函数极限的一个注记

陶志雄
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要:有时求多元函数极限会出现一些低级错误,这些错误学生稍不留意就会被误导而不自知,而引起这些错误的主要原因是缩小了函数的定义域。为此,列举了一些错误做法,并给出了正确的做法。进而提供了一些结论,如果教科书罗列这些结论,那么这些本不合理的做法将成为合理的便利的做法。

关键词:高等数学;数学分析;多元函数;极限

中图分类号:G642.0;O172　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2017)05-0391-03

A note on the limit of multivariate functions

TAO Zhixiong
(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, Zhejiang, China)

Abstract: The calculations of the limit of a multivariate function are occasionally accompanied with some low-level errors, which tend to mislead students if they are not careful enough. In the calculation process, these errors are mainly attributed to reduction of the domain of the function. The article presents examples of these errors together with correct approaches, on the basis of which the article finally draws some conclusions. If they are quoted in the textbook, the approaches thought to be unreasonable will turn out to be reasonable and convenient.

Keywords: advanced mathematics; mathematical analysis; multivariate function; limit

求多元函数的极限要比求一元函数的极限复杂很多,常用的做法是把问题转化为一元函数的极限,因为一元函数求极限有反复介绍和使用的工具和方法,其中二元函数极限是大一学生必学的高等数学内容,学过高等数学的都知道一元函数极限中最值得研究,也是最令人感兴趣之一的问题是无穷小之比的极限,其实多元函数也是如此。但是,如果不小心,那么在求这一类多元函数的极限时就会犯一些低级的错误。譬如,在极限的运算过程中缩小了函数的定义范围,这样求出的极限只是函数在较小范围内的极

收稿日期:2016-12-04

基金项目:浙江省自然科学基金项目(LY12A01025)

通信作者:陶志雄(1961—　),男,浙江省绍兴人,副教授,博士,主要从事几何拓扑学研究及大学数学教学。E-mail:taozhx@zust.edu.cn。

限，虽然求出的极限可能是正确的，但这样的求极限方法是有问题的。如果这些错误在考试中出现，对学生成绩会造成负面影响，在文献[1]中也有过关于这方面的一些讨论。笔者注意到，一般教材都避开讨论这类二元函数无穷小之比的极限问题，即使是著名的菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》[2]也没有这样的例子，而吉米多维奇的《数学分析习题集》[3]也很少有这样的习题。笔者尝试做一些简单的探讨，试图来修正这些做法，给出 2 个定理，在它们的帮助下，这些常见的错误做法求出的极限就有了依据，成为正确的答案。同时，在不增加结论的基础上也给出一些正确的做法。

1 常见的错误

例 1 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 在原点处的连续性。

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{x^{-2}+y^{-2}}=0,(\text{因为}\lim_{x\to 0}x^{-2}=\lim_{y\to 0}y^{-2}=\infty)。\tag{1}$$

例 2 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$。

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot\frac{x^2y}{x^2+y^2}。\tag{2}$$

令 $u=x^2y$，则由 $(x,y)\to(0,0)$，得 $u\to 0$，于是有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$。

又

$$0\leqslant\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x^2y}{2xy}\right|=\frac{|x|}{2},\tag{3}$$

因 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{|x|}{2}=0$，所以根据夹逼准则(也称迫敛性)[4-7]，有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$。这样，所求极限为 0。

显然，式(1)～(3)不符合原来的定义域，即缩小了原来的定义域。

2 错误的纠正和一些结论

从上面的例子看出，错误的源头在于缩小了原来的定义域。值得指出的是，不能认为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ 是合理的做法，或者替代的做法。事实上，其错误和式(2)是一样的。一般而言，如果极限在更大的范围里存在，那么，在更小的范围里所求的极限也是这个值。但如果求极限是在较小的范围里面得到的，那么这个极限就不能作为更大的范围的结果使用，换言之，求极限的方法有问题[4-7]。

例 2 的第一个错误是比较常见的，似乎顺理成章地使用了一元函数的求极限方法。但由于原先极限 x,y 可取除原点之外的点，而除以 x^2y 以后缩小了 x,y 的取值范围，即 x,y 都不能取坐标轴上的点。因此，该做法不可取。但这样的做法在有些教材中出现，更多的在解答书中看到，也就是一不小心忽视了函数的定义域。其根源还是在于求一元函数的极限时经常使用一个无穷小再除以一个无穷小，但这种等价无穷小替代定理[4-7]要求分子分母都是无穷小的。有些学生经常不管分母是否是无穷小都在使用这个等价无穷小替代定理，甚至在一元函数求极限的时候有时也使用。

例 2 题的正确做法应该是：

解 因对于任何实数 α，有 $|\sin\alpha|\leqslant|\alpha|$，故有

$$0\leqslant\frac{|\sin(x^2y)|}{x^2+y^2}\leqslant\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right||x|\leqslant\frac{1}{2}|x|,$$

而$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{2}|x|=0$,所以由夹逼准则,得$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0$。

命题[4]　极限$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}}f(P)$存在的充要条件是:对于 D 中任一满足条件 $P_n\neq P_0$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 的点列$\{P_n\}$,它所对应的函数列$\{f(P_n)\}$都收敛。

定理 1　若函数 $f(x,y)$在原点的某个去心邻域$\mathring{U}((0,0),\delta)(\delta>0)$内连续,且$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}}f(x,y)=A$,那么$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=A$。

证明　选择任何一个序列$\{(x_m,y_m)\}\subset U((0,0),\delta)-\{(0,0)\}$,使得当 $m\to+\infty$时,$(x_m,y_m)\to(0,0)$。

如果$\{(x_m,y_m)\}\cap\{(x,y)|xy=0\}$是一个有限集,那么,$\lim\limits_{m\to\infty}f(x_m,y_m)=A$,如果$\{(x_m,y_m)\}\cap\{(x,y)|xy=0\}$是一个无限集,则可以不妨设

$$\{(x_m,y_m)\}\cap\{(x,y)|xy=0\}=\{(x_{m_k},y_{m_k})\}。$$

它是$\{(x_m,y_m)\}$的子列,且每个点都是在坐标轴上,根据题设,这些点都是函数 $f(x,y)$的连续点,于是存在一个序列$\{(\bar{x}_k,\bar{y}_k)\}\subset\{U((0,0),\delta)\cap\{(x,y)|xy\neq 0\}\}$,使得 $d((\bar{x}_k,\bar{y}_k),(x_{m_k},y_{m_k}))<1/k$。这里 d 表示两点之间的距离度量(即黎曼度量),而且$|f(\bar{x}_k,\bar{y}_k)-f(x_{m_k},y_{m_k})|<1/k$,即

$$f(\bar{x}_k,\bar{y}_k)-1/k<f(x_{m_k},y_{m_k})<f(\bar{x}_k,\bar{y}_k)+1/k,$$

夹逼准则和假设意味着$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{m_k},y_{m_k})=\lim\limits_{k\to\infty}f(\bar{x}_k,\bar{y}_k)=A$。

但$\{f(x_{m_k},y_{m_k})\}$在数列$\{f(x_m,y_m)\}$中的余集也是$\{f(x_m,y_m)\}$的子列,而且如果是无限集其极限就是 A,如果是有限集,数列$\{f(x_m,y_m)\}$的极限就是$\{f(x_{m_k},y_{m_k})\}$的极限,因此,$\lim\limits_{m\to\infty}f(x_m,y_m)=A$。对于任何一个 $U((0,0),\delta)-\{(0,0)\}$中趋于$\{(0,0)\}$点列$\{(x_m,y_m)\}$,子列$\{f(x_m,y_m)\}$的极限都是 A,由海涅定理(归结原则)[4],可得$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=A$。

这样就完成了定理的证明。

这个定理也可以推广到更一般的情形,即:

定理 2　已知函数 $f(P)$在点 P_0 的某个去心邻域 U 内连续,$V\subset U$ 且 V 的每一点均是 U 的聚点[2,4-5],$P_0\in V$,若$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in U-V}}f(P)=A$,则$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in U}}f(P)=A$。

证明可以参照**定理 1**。

3　结　语

上述 2 个定理说明了**例 2**中的做法如果以这两个定理之一作为铺垫,那么就合理了,所以,建议教材列入这两个定理之一,否则就会有概念混乱的现象,或者在教材中避谈这一类的极限,但这是极限理论的一个缺憾。将一元函数的等价无穷小替代使用到求二元函数极限中,这是非常便利的做法,如果避开这种方法,这类问题可能只能使用函数极限的夹逼准则或者极限的 ε-δ[4-6]语言了,而这是工科学生的弱项。使用这两种方法,一般没有固定的做法。

参考文献:

[1]　陶志雄.高等数学考试中的一些错误分析[J].浙江科技学院学报,2013,25(3):224.

[2]　菲赫金哥尔茨 Γ M.微积分学教程:第一卷[M].8 版.杨弢亮,叶彦谦,译.北京:高等教育出版社,2006.

[3]　吉米多维奇.数学分析习题集[M].2 版.李荣涞,李植,译.北京:高等教育出版社,2010.

[4]　华东师范大学数学系.数学分析[M].4 版.北京:高等教育出版社,2010.

[5]　同济大学数学系.高等数学[M].6 版.北京:高等教育出版社,2007.

[6]　陶祥兴,朱婉珍.高等数学[M].北京:高等教育出版社,2012.

[7]　芬尼,韦尔,吉尔当诺.托马斯微积分[M].10 版.叶其孝,王耀东,唐兢,译.北京:高等教育出版社,2004.