浙江科技学院学报，第 30 卷第 3 期，2018 年 6 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 30 No. 3，Jun. 2018

doi：10.3969/j.issn.1671-8798.2018.03.001

非齐性空间上的双线性广义分数次积分算子

郑涛涛[1]，来越富[2]
（浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

摘　要：在非齐性距离空间(X,d,μ)上利用函数的分解来研究双线性广义分数次积分算子在乘积 Morrey 空间上的有界性，从而克服了底空间测度缺乏双倍条件及多项式增长条件带来的困难。

关键词：广义分数次积分；非齐性空间；Morrey 空间
中图分类号：O174.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2018)03-0181-06

Bilinear generalized fractional integral operator on non-homogeneous spaces

ZHENG Taotao，LAI Yuefu
（School of Sciences，Zhejiang University of Science and Technology，Hangzhou 310023，Zhejiang，China）

Abstract：The bilinear generalized fractional integral operator was approached on non-homogeneous spaces(X,d,μ). By means of decomposition of function，the boundedness of the operator was obtained on product Morrey spaces，by overcoming some difficulties from measures lacking the doubling condition and the polynomial growth condition.

Keywords：generalized fractional integral；non-homogeneous spaces；Morrey spaces

在近 20 年中，经典欧式空间上的调和分析被延拓到非双倍测度空间，其中测度 μ 仅满足多项式增长条件，即存在正常数 C_0 使得对所有的 $x\in\mathbb{R}^n$ 及 $r\in(0,\infty)$ 有

$$\mu(B(x,r))\leqslant C_0r^n,$$

$B(x,r):=\{y\in\mathbb{R}^n:|x-y|<r\}$。显然，上式中的测度并不满足双倍条件：$\mu(B(x,2r))\leqslant C\mu(B(x,r))$。非双倍测度的分析学在解决长期而又公开的 Painlevé 问题时起着很重要的作用[1]。2010 年，Hytönen[2]引入了一类满足几何双倍与上双倍条件的距离测度空间(X,d,μ)，此空间也称为非齐性空间（见**定义 2** 与**定义 3**）。带多项式增长条件的度量空间与带双倍条件的齐性空间很自然地被这类新的距离测度空间所包含。

在这类更广的非齐性空间上，许多人研究了 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的相关性质[3-7]。但是由

收稿日期：2018-03-20
基金项目：国家自然科学基金项目(11626213)；浙江省自然科学基金项目(LQ17A010002)
通信作者：郑涛涛(1984—　)，男，江西省上饶人，讲师，博士，主要从事调和分析研究。E-mail：taotzheng@126.com。

于空间(X,d,μ)的弱结构,测度在平移和伸缩时性质较差,致使对分数型积分算子在非齐性空间上的研究结论尚不完善。因此,本文将以此非齐性空间(X,d,μ)为底空间来研究双线性广义分数次积分算子。

1 广义分数次积分算子及相关定义

对于经典欧式空间上的分数次积分算子,定义如下

$$J_\eta f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\eta}}\mathrm{d}y,0<\eta<n,$$

其有著名的 Hardy-Littlewood-Sobolev 定理[8],即对所有的 $q\in(1,n/\eta)$,$1/p=1/q-\eta/n$,J_η 是从 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n)$的有界算子。付星等[9]515 在非齐性空间(X,d,μ)上研究了广义分数次积分算子 T_β 的有界性与弱型端点估计的等价刻画,其中

$$T_\beta f(x)=\int_X\frac{f(y)}{[\lambda(x,d(x,y))]^{1-\beta}}\mathrm{d}\mu(y),0<\beta<1,$$

但广义分数次积分算子在(X,d,μ)上的$(L^q(\mu),L^p(\mu))$有界性以及弱型端点估计的证明至今还是一个公开的问题。关于广义分数次积分算子的研究,类似于 Calderón-Zygmund 奇异积分算子,需假定广义分数次积分算子满足某一定的有界性。在此基础上,周疆等[10]8 以(X,d,μ)为底空间研究了广义分数次积分算子 T_β 在非双倍测度 Morrey 空间上的有界性。谢如龙等[11]3 将广义分数次积分算子推广到双线性情形并研究了其交换子。在文献[10-11]中,为获得广义分数次积分算子的若干有界性,需要对(X,d,μ)中的测度 μ 加齐次性辅助条件。本文拟以(X,d,μ)为底空间,研究双线性广义分数次积分算子在非双倍测度 Morrey 空间上(见**定义 4**)的有界性,且关于测度 μ 不需增加齐次性辅助条件。为陈述本文的主要问题,我们先给出相关定义。

定义 1 在(X,d,μ)上的双线性分数次积分算子的定义,设 $A>0$ 是一个常数,$\alpha\in(0,2)$。设 $K(x,y_1,y_2)$是$(X)^3$ 的对角线$\{x=y_1=y_2\}$之外的局部可积函数,并满足下面的尺寸条件与光滑性条件:

1)当$(x,y_1,y_2)\in(X)^3$ 且 x 不等于某个 $y_i(1\leqslant i\leqslant 2)$时,

$$|K(x,y_1,y_2)|\leqslant\frac{A}{[\sum_{i=1}^{2}\lambda(x,d(x,y_i))]^{2-\alpha}}。\tag{1}$$

2)存在常数 $\delta(0<\delta\leqslant 1)$,当 $d(x,x')\leqslant\frac{1}{2}\max_{i\in\{1,2\}}d(x,y_i)$时,

$$|K(x,y_1,y_2)-K(x',y_1,y_2)|\leqslant\frac{A\mathrm{d}(x,x')^\delta}{[\sum_{i=1}^{2}d(x,y_i)]^\delta[\sum_{i=1}^{2}\lambda(x,d(x,y_i))]^{2-\alpha}}。$$

3)对于任意满足 $1\leqslant i\leqslant 2$ 的 i,当 $d(y_i,y'_i)\leqslant\frac{1}{2}\max d(x,y_i)$时,

$$|K(x,y_1,y_2)-K(x,y'_1,y_2)|\leqslant\frac{Ad(x,y'_1)^\delta}{[\sum_{i=1}^{2}d(x,y_i)]^\delta[\sum_{i=1}^{2}\lambda(x,d(x,y_i))]^{2-\alpha}};$$

$$|K(x,y_1,y_2)-K(x,y_1,y'_2)|\leqslant\frac{Ad(x,y'_2)^\delta}{[\sum_{i=1}^{2}d(x,y_i)]^\delta[\sum_{i=1}^{2}\lambda(x,d(x,y_i))]^{2-\alpha}}。$$

假设算子 I_α 是双线性的,对 L^∞ 中的有紧支集的可测函数 f_i 以及几乎处处的 $x\notin\bigcap_{i=1}^2\operatorname{supp}f_i$ 若成立下式

$$I_\alpha(f_1,f_2)(x)=\int_{(X)^2}K(x,y_1,y_2)f_1(y_1)f_2(y_2)\mathrm{d}\mu(y_1)\mathrm{d}\mu(y_2),\tag{2}$$

则称 I_α 是以 K 为核的双线性广义分数次积分算子。

定义 2[2]489 如果存在数 $N\in\mathbb{N}$ 使得对任意开球 $B(x,r)\subset X$ 最多被 N 个球 $B(x_i,r/2)$覆盖,则称空间(X,d)为几何双倍度量空间。

定义 3[2]489 如果存在控制函数 $\lambda:X\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 以及常数 C_λ 使得(X,d,μ)中的 Borel 测度 μ 满足以

下 3 条件，则称测度 μ 满足上双倍测度。

1）对任意固定的 $x\in X$，关于半径 $r\to\lambda(x,r)$ 是递增的。

2）对于所有 $x\in X$，$0<r<\infty$，$\mu(B(x,r))\leqslant\lambda(x,r)\leqslant C_\lambda\lambda(x,r/2)$ 成立。

3）对于所有的半径 $r>0$，$x,y\in X$，若 $d(x,y)\leqslant r$，则有 $\lambda(x,r)\approx\lambda(y,r)$。

定义 4[10,12-13]　设 $k>1$，$1\leqslant q\leqslant p<\infty$，Morrey 空间可由如下形式给出

$$M_q^p(k,\mu):=\{f\in L_{\mathrm{loc}}^q(\mu),\ \|f\|_{M_q^p(k,\mu)}<\infty\},$$

其中，

$$\|f\|_{M_q^p(k,\mu)}:=\sup_{B\in X}\mu(kB)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_B|f|^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}。$$

当 $1\leqslant s\leqslant t\leqslant p<\infty$ 时，利用 Hölder 不等式可得 $L^p(\mu)=M_p^p(k,\mu)\subset M_t^p(k,\mu)\subset M_s^p(k,\mu)$。设 $k,\tilde{k}>1$，有 $M_q^p(k,\mu)\approx M_q^p(\tilde{k},\mu)$ 成立，这说明 Morrey 空间的定义与常数 $k,\tilde{k}$ 的选取无实质性的关联。下文中将取 $k=6$，并记 $M_q^p(6,\mu)$ 为 $M_q^p(\mu)$，类似的性质也可参见文献[14-15]。

关于本文常用的一些符号，若 $p\geqslant1$，$p'=p/(p-1)$ 表示 p 的对偶指标，$f\lesssim g$ 表示存在常数 C 使得 $f\leqslant Cg$，χ_E 表示可测集 E 的特征函数。

2　主要结论

假定对于某些 $r\in(1,\beta)$，$1/s=1/r-\beta$，广义分数次积分算子 T_β 是 $(L^r(\mu),L^s(\mu))$ 有界的。本文将以 (X,d,μ) 为底空间，测度 μ 仅满足上双倍条件的基础上，研究双线性广义分数次积分算子 I_α 在 Morrey 空间上的有界性。主要结论如下：

定理 1　设 K 为双线性分数次积分核，I_α 为式(2)所定义的双线性广义分数次积分算子，$\alpha\in(0,2)$。设 $1<q_i\leqslant p_i<\infty$，$f_i\in M_{q_i}^{p_i}(\mu)$，$i=1,2$，且有 $1/p=1/p_1+1/p_2-\alpha$，$1/q=1/q_1+1/q_2-\alpha$，则存在正常数 C 使得

$$\|I_\alpha(f_1,f_2)\|_{M_q^p(\mu)}\leqslant C\|f_1\|_{M_{q_1}^{p_1}(\mu)}\|f_2\|_{M_{q_2}^{p_2}(\mu)}。$$

注：若双线性广义分数次积分算子 I_α 退化为线性的广义分数次积分算子 T_β，则本文的结论可以包含文献[10]中的部分结论。注意到文献[10-11]中其控制函数 λ 需增加额外的条件：即"存在 $t\in(0,\infty)$ 使得对所有的 $x\in X$ 以及 $a,r\in(0,\infty)$ 都有 $\lambda(x,ar)=a^t\lambda(x,r)$"，而在本文的定理证明中 λ 不需满足此额外条件。

3　主要结论证明

在证明**定理** 1 之前，我们先给出一个双线性广义分数次积分算子 I_α 在乘积 Lebesgue 空间上的有界性命题以及一个引理，这对于证明 I_α 在乘积 Morrey 空间上的有界性起着关键作用。

命题 1　设 K 为双线性分数次积分核，I_α 为(2)式所定义的双线性广义分数次积分算子，$\alpha\in(0,2)$。设 $1<p_1,p_2<\infty$，$0<1/p=1/p_1+1/p_2-\alpha<1$，$f_i\in L^{p_i}(\mu)$，$i=1,2$，则存在正常数 C 使得

$$\|I_\alpha(f_1,f_2)\|_{L^p(\mu)}\leqslant C\|f_1\|_{L^{p_1}(\mu)}\|f_2\|_{L^{p_2}(\mu)}。$$

证明：先对双线性广义分数次积分算子 I_α 做点态估计，

$$|I_\alpha(f_1,f_2)(x)|\leqslant C\int_{(X)^2}\frac{|f_1(y_1)f_2(y_2)|}{\left[\sum_{i=1}^2\lambda(x,d(x,y_i))\right]^{2-\alpha}}\mathrm{d}\mu(y_2)\mathrm{d}\mu(y_1)\lesssim$$

$$\prod_{i=1}^2\int_X\frac{|f_i(y_i)|}{[\lambda(x,d(x,y_i))]^{1-\alpha/2}}\mathrm{d}\mu(y_i)=$$

$$\prod_{i=1}^2 T_{\alpha/2}(|f_i|)(x)。$$

设有 $t_1,t_2\in(1,2/\alpha)$ 使得 $1/t_1=1/p_1-\alpha/2$，$1/t_2=1/p_2-\alpha/2$。下面需要利用广义分数次积分算子 $T_{\alpha/2}$ 的 (L^{p_i},L^{t_i}) 有界性来证明 I_α 的有界性。由于 $1/p=1/t_1+1/t_2$，利用 Hölder 不等式得

$$\|I_\alpha(f_1,f_2)\|_{L^p(\mu)}\lesssim\left\|\prod_{i=1}^2 T_{\alpha/2}(|f_i|)\right\|_{L^p(\mu)}\lesssim$$

$$\|T_{\alpha/2}(|f_1|)\|_{L^{t_1}(\mu)}\|T_{\alpha/2}(|f_2|)\|_{L^{t_2}(\mu)}\leqslant C\|f_1\|_{L^{p_1}(\mu)}\|f_2\|_{L^{p_2}(\mu)}。$$

命题 1 证毕。

引理 1 设 $f\in L^{q}(\mu)$，$0<\beta<1/q<1$ 时，有

$$\int_{X\backslash B}\frac{|f(y)|}{[\lambda(x,d(x,y))]^{1-\beta}}\mathrm{d}\mu(y)\lesssim\mu(B)^{-\frac{1}{q}+\beta}\|f\|_{L^{q}(\mu)}。$$

证明：利用 Hölder 不等式得

$$\int_{X\backslash B}\frac{|f(y)|}{[\lambda(x,d(x,y))]^{1-\beta}}\mathrm{d}\mu(y)\lesssim\left(\int_{X\backslash B}|f(y)|^{q}\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{X\backslash B}\frac{1}{[\lambda(x,d(x,y))]^{q'(1-\beta)}}\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q'}}\lesssim$$

$$\|f\|_{L^{q}(\mu)}\left(\int_{X\backslash B}\frac{1}{[\lambda(x,d(x,y))]^{q'(1-\beta)}}\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q'}}。$$

若是能证明下式成立

$$\left(\int_{X\backslash B}\frac{1}{[\lambda(x,\mathrm{d}(x,y))]^{q'(1-\beta)}}\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q'}}\lesssim(\lambda(x,r))^{-\frac{1}{q}+\beta},\tag{3}$$

则因 $\beta<1/q$，测度 $\mu(B(x,r))\leqslant\lambda(x,r)$，容易得到**引理 1** 的结论

$$\int_{X\backslash B}\frac{|f(y)|}{\lambda(x,d(x,y))}\mathrm{d}\mu(y)\lesssim(\lambda(x,r))^{-\frac{1}{q}+\beta}\|f\|_{L^{q}(\mu)}\lesssim\mu(B)^{-\frac{1}{q}+\beta}\|f\|_{L^{q}(\mu)}。$$

下面我们将证明式(3)。首先构造辅助性的半径序列$\{r_0,r_1,r_2\cdots\}$使得 $r_0=r$，r_{i+1}是满足 $2^{k}r_i$ 形式的最小半径，其中 $k\in\mathbb{N}$ 且 $\lambda(x,2^{k}r_i)>2\lambda(x,r_i)$，$\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}=\{B(x,r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$。可得简单的递推关系 $2^{i}\lambda(x,r)\leqslant\lambda(x,r_i)$，$i\in\mathbb{Z}_{+}$，再借助 λ 的性质可以得到

$$\int_{X\backslash B}\frac{1}{[\lambda(x,d(x,y))]^{q'(1-\beta)}}\mathrm{d}\mu(y)\lesssim\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mu(B_{i+1})}{[\lambda(x,r_{i+1})]^{q'(1-\beta)}}\lesssim\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{[\lambda(x,r_{i+1})]^{q'(1-\beta)-1}}\lesssim$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{[2^{i}\lambda(x,r)]^{q'(1-\beta)-1}}\approx\frac{1}{[\lambda(x,r)]^{q'(1-\beta)-1}}。$$

由此可以得到，

$$\left(\int_{X\backslash B}\frac{1}{[\lambda(x,d(x,y))]^{q'(1-\beta)}}\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q'}}\lesssim\left(\frac{1}{[\lambda(x,r)]^{q'(1-\beta)-1}}\right)^{\frac{1}{q'}}=(\lambda(x,r))^{-\frac{1}{q}+\beta},$$

引理 1 证毕。

下面我们给出**定理 1** 的证明。固定球 $B\in X$，$x\in B$，可将函数 f_i 分解为 $f_i=f_i^{0}+f_i^{\infty}$，其中 $f_i^{0}=f_iX_{2B}$，$f_i^{\infty}=f_i-f_i^{0}$，$i=1,2$，可得

$$\begin{aligned}|I_{\alpha}(f_1,f_2)(x)|\leqslant&|I_{\alpha}(f_1^{0},f_2^{0})(x)|+|I_{\alpha}(f_1^{0},f_2^{\infty})(x)|+\\&|I_{\alpha}(f_1^{\infty},f_2^{0})(x)|+|I_{\alpha}(f_1^{\infty},f_2^{\infty})(x)|:=\\&E_1(x)+E_2(x)+E_3(x)+E_4(x)。\end{aligned}$$

首先估算 $E_1(x)$，利用**命题 1** 中 I_{α} 的有界性结论，可得

$$\begin{aligned}\|I_{\alpha}(f_1^{0},f_2^{0})\|_{M_q^{p}(\mu)}\leqslant&\sup_{B\in X}\mu(6B)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_{B}|I_{\alpha}(f_1^{0},f_2^{0})(y)|^{q}\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}\lesssim\\&\sup_{B\in X}\mu(6B)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\prod_{i=1}^{2}\left(\int_{2B}|f_i|^{q_i}\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q_i}}\lesssim\\&\sup_{B\in X}\prod_{i=1}^{2}\mu(6B)^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}}\left(\int_{2B}|f_i|^{q_i}\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q_i}}\lesssim\\&\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(\mu)}。\end{aligned}$$

关于 $E_2(x)$，对 α 做分解 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ 使得 $\alpha_1<1/q_1$，$\alpha_2<1/q_2$。利用核 K 的尺寸条件式(1)以及对所有的 $x,y\in X$ 且 $d(x,y)\leqslant r$ 有 $\lambda(y,r)\approx\lambda(x,r)$，

$$|E_2(x)|=|I_{\alpha}(f_1^{0},f_2^{\infty})(x)|\lesssim\int_{2B}|f_1(y_1)|\int_{X\backslash 2B}\frac{|f_2(y_2)|}{[\sum_{i=1}^{2}\lambda(x,d(x,y_i))]^{2-\alpha}}\mathrm{d}\mu(y_2)\mathrm{d}\mu(y_1)\lesssim$$

$$\int_{2B}|f_1(y_1)|\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^{k}B}\frac{|f_2(y_2)|}{[\lambda(x,d(x,y_2))]^{2-\alpha}}\mathrm{d}\mu(y_2)\mathrm{d}\mu(y_1)\lesssim$$

$$\int_{2B}|f_1(y_1)|\frac{1}{[\lambda(x_B,2^k r_B)]^{1-\alpha_1}}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^k B}\frac{|f_2(y_2)|}{[\lambda(x,d(x,y_2))]^{1-\alpha_2}}\mathrm{d}\mu(y_2)\mathrm{d}\mu(y_1)\lesssim$$

$$\mu(2B)^{-1+\alpha_1}\int_{2B}|f_1(y_1)|\mathrm{d}\mu(y_1)\int_{X\backslash 2B}\frac{|f_2(y_2)|}{[\lambda(x,d(x,y_2))]^{1-\alpha_2}}\mathrm{d}\mu(y_2)\lesssim$$

$$\mu(2B)^{-1+\alpha_1}(\mu(2B))^{1-\frac{1}{q_1}}\|f_1\|_{L^{q_1}(\mu)}(\mu(2B))^{-\frac{1}{q_2}+\alpha_2}\|f_2\|_{L^{q_2}(\mu)}\lesssim$$

$$\mu(2B)^{-\frac{1}{q}}\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{L^{q_i}(\mu)}。$$

根据上面的估计式有

$$\|I_\alpha(f_1^0,f_2^\infty)\|_{M_q^p(\mu)}\leqslant\sup_{B\in X}\mu(6B)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_B|I_\alpha(f_1^0,f_2^\infty)(y)|^q\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}\lesssim$$

$$\mu(6B)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\mu(B)^{\frac{1}{q}}\mu(2B)^{-\frac{1}{q}}\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{L^{q_i}(\mu)}\lesssim$$

$$\left(\frac{\mu(B)}{\mu(2B)}\right)^{\frac{1}{q}}\prod_{i=1}^{2}\mu(6B)^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}}\|f_i\|_{L^{q_i}(\mu)}\lesssim\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(\mu)}。$$

由于 $E_2(x)$ 与 $E_3(x)$ 具有对称性,类似地可以得到 $E_3(x)$ 的估计

$$\|I_\alpha(f_1^\infty,f_2^0)\|_{M_q^p(\mu)}\leqslant\sup_{B\in X}\mu(6B)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_B|I_\alpha(f_1^\infty,f_2^0)(y)|^q\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}\lesssim\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(\mu)}。$$

关于 $E_4(x)$,先对 $|I_\alpha(f_1^\infty,f_2^\infty)|$ 做点态估计。由于 $x\in B,y_1,y_2\in X\backslash 2B$,将积分区域分解得到

$$|T(f_1^\infty,f_2^\infty)|\chi_B(x)\lesssim\int_{X\backslash 2B}\int_{X\backslash 2B}\frac{|f_1(y_1)||f_2(y_2)|}{[\sum_{i=1}^{2}\lambda(x,d(x,y_i))]^{2-\alpha}}\mathrm{d}\mu(y_1)\mathrm{d}\mu(y_2)\lesssim$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^k B}|f_2(y_2)|\int_{2^{j+1}B\backslash 2^j B}\frac{|f_1(y_1)|}{[\sum_{i=1}^{2}\lambda(x,d(x,y_i))]^{2-\alpha}}\mathrm{d}\mu(y_1)\mathrm{d}\mu(y_2)+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k-1}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^k B}\frac{|f_2(y_2)|}{[\sum_{i=1}^{2}\lambda(x,d(x,y_i))]^{2-\alpha}}\int_{2^{j+1}B\backslash 2^j B}|f_1(y_1)|\mathrm{d}\mu(y_1)\mathrm{d}\mu(y_2):=$$

$$E_{41}(x)+E_{42}(x)。$$

对于第一项 $E_{41}(x)$,利用广义分数次积分算子核的尺寸条件式(1),可得

$$E_{41}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^k B}\frac{|f_2(y_2)|}{[\lambda(x,d(x,y_2))]^{1-\alpha_2}}\int_{2^{j+1}B\backslash 2^j B}\frac{|f_1(y_1)|}{[\lambda(x,d(x,y_1))]^{1-\alpha_1}}\mathrm{d}\mu(y_1)\mathrm{d}\mu(y_2)\lesssim$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^{j+1}B\backslash 2^j B}\frac{|f_1(y_1)|}{[\lambda(x,d(x,y_1))]^{1-\alpha_1}}\mathrm{d}\mu(y_1)\sum_{k=1}^{j}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^k B}\frac{|f_2(y_2)|}{[\lambda(x,d(x,y_2))]^{1-\alpha_2}}\mathrm{d}\mu(y_2)\lesssim$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^{j+1}B\backslash 2^j B}\frac{|f_1(y_1)|}{[\lambda(x,d(x,y_1))]^{1-\alpha_1}}\mathrm{d}\mu(y_1)\int_{2^{j+1}B\backslash 2B}\frac{|f_2(y_2)|}{[\lambda(x,d(x,y_2))]^{1-\alpha_2}}\mathrm{d}\mu(y_2)\lesssim$$

$$\prod_{i=1}^{2}\int_{X\backslash 2B}\frac{|f_i(y_i)|}{[\lambda(x,d(x,y_i))]^{1-\alpha_i}}\mathrm{d}\mu(y_i),$$

$$E_{42}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k-1}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^k B}\frac{|f_2(y_2)|}{[\lambda(x,d(x,y_2))]^{1-\alpha_2}}\int_{2^{j+1}B\backslash 2^j B}\frac{|f_1(y_1)|}{[\lambda(x,d(x,y_1))]^{1-\alpha_1}}\mathrm{d}\mu(y_1)\mathrm{d}\mu(y_2)\lesssim$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^k B}\frac{|f_2(y_2)|}{[\lambda(x,d(x,y_2))]^{1-\alpha_2}}\mathrm{d}\mu(y_2)\int_{2^k B\backslash 2B}\frac{|f_1(y_1)|}{[\lambda(x,d(x,y_1))]^{1-\alpha_1}}\mathrm{d}\mu(y_1)\lesssim$$

$$\prod_{i=1}^{2}\int_{X\backslash 2B}\frac{|f_i(y_i)|}{[\lambda(x,d(x,y_i))]^{1-\alpha_i}}\mathrm{d}\mu(y_i)。$$

由此可得 $E_{41}(x)$ 与 $E_{42}(x)$ 都可以被 $\int_{X\backslash 2B}\frac{|f_i(y_i)|}{[\lambda(x,d(x,y_i))]^{1-\alpha_i}}\mathrm{d}\mu(y_i)$ 所控制。由于 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$,$1/p=1/p_1+1/p_2-\alpha$,$1/q=1/q_1+1/q_2-\alpha$,利用**引理 1** 中的结论可得

$$\prod_{i=1}^{2}\int_{X\backslash 2B}\frac{|f_i(y_i)|}{[\lambda(x,d(x,y_i))]^{1-\alpha_i}}\mathrm{d}\mu(y_i)\lesssim\prod_{i=1}^{2}\mu(2B)^{-\frac{1}{q_i}+\alpha_i}\|f_i\|_{L^{q_i}(\mu)}=$$

$$\prod_{i=1}^{2}\mu(2B)^{-\frac{1}{q_i}+\alpha_i}\mu(6B)^{-\frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}}\mu(6B)^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}}\|f_i\|_{L^{q_i}(\mu)}=$$

$$\mu(2B)^{\alpha}\mu(6B)^{-\frac{1}{p}-\alpha}\left(\frac{\mu(6B)}{\mu(2B)}\right)^{\frac{1}{q}+\alpha}\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(\mu)}。$$

结合 $E_{41}(x)$与 $E_{42}(x)$以及上面的估计式,可得

$$\|I_\alpha(f_1^\infty,f_2^\infty)\|_{M_q^p(\mu)}\leqslant\sup_{B\in X}\ \mu(6B)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_B|I_\alpha(f_1^\infty,f_2^\infty)(y)|^q\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}\lesssim$$

$$\mu(6B)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\mu(B)^{\frac{1}{q}}\mu(2B)^{\alpha}\mu(6B)^{-\frac{1}{p}-\alpha}\left(\frac{\mu(6B)}{\mu(2B)}\right)^{\frac{1}{q}+\alpha}\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(\mu)}\lesssim$$

$$\left(\frac{\mu(B)}{\mu(2B)}\right)^{\frac{1}{q}}\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(\mu)}\lesssim\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{M_{q_i}^{p_i}(\mu)}。$$

综合 $E_1(x)$,$E_2(x)$,$E_3(x)$,$E_4(x)$的估计式可得**定理 1** 的结论。**定理 1** 证毕。

4 结 论

通过对函数的分解,将积分区域进行环状分割,可将双线性广义分数次积分算子在乘积 Lebesgue 空间上的有界性以及在 Morrey 空间上的有界性,转化为线性情形的有界性来处理。

参考文献:

[1] TOLSA X. Painlevé's problem and the semiadditivity of analytic capacity[J]. Acta Mathematica, 2003, 190(1):105.

[2] HYTÖNEN T. A framework for non-homogeneous analysis on metric spaces, and the RBMO spaces of Tolsa[J]. Publicacions Matematiques, 2010, 54(2):485.

[3] HU G, MENG Y, YANG D C. Weighted norm inequalities for multilinear Calderón-Zygmund operators on non-homogeneous metric measure spaces[J]. Forum Mathematicum, 2014, 26(5):1289.

[4] LIN H B, WU S Q, YAND D C. Boundedness of certain commutators over non-homogeneous metric measure spaces [J]. Analysis and Mathematical Physics, 2017, 7(2):187.

[5] ZHENG T T, WU X M, TAO X X. Bilinear Calderón-Zygmund operators of type ω(t) on non-homogeneous space [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2014(1):113.

[6] ZHENG T T, WANG Z, XIAO W. Maximal bilinear Calderón-Zygmund operators of type ω(t) on non-homogeneous space [J]. Annals of Functional Analysis, 2015, 6(4):134.

[7] ZHENG T T, TAO X X. Boundedness for iterated commutators of multilinear singular integrals of Dini's type on non-homogeneous metric measure spaces (in Chinese)[J]. Science sinica mathematica, 2017, 47(9):1029.

[8] CHEN J C, FAN D S, ZHENG T T. Estimates of fractional integral operator with variable kernel[J]. Publicationes Mathematicae Debrecen, 2017, 90(1):39.

[9] FU X, YANG D C, YUAN W. Generalized fractional integrals and their commutators over non-homogeneous metric measure spaces[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2014, 18(2):509.

[10] CAO Y H, ZHOU J. Morrey spaces for non-homogeneous metric measure spaces[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013 (4):1.

[11] GONG H J, XIE R L, CHEN X. Multilinear fractional integral operators on Non-homogeneous metric measure spaces[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2016(1):1.

[12] TAO X X, ZHENG T T. Multilinear commutators of fractional integrals over Morrey spaces with non-doubling measures[J]. Nonlinear Differential Equations and Applications, 2011, 18(3):287.

[13] KOMORI-FURUYA Y, SATO E. Weighted estimates for fractional integral operators on central Morrey spaces [J]. Mathematische Nachrichten, 2017, 20(3):2901.

[14] YAN Y, CHEN J, LIN H B. Weighted Morrey spaces on non-homogeneous metric measure spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 452(1):335.

[15] 郑涛涛, 张松艳. 一类算子在非倍测度的广义 Morrey 空间上的有界性[J]. 浙江科技学院学报, 2011,23(1):1.