

一类高阶拟线性波动方程整体解的指数衰减

叶子青,叶耀军

(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘要: 研究一类具有耗散项的高阶拟线性波动方程的初边值问题,借助于能量估计和乘子方法,应用积分不等式建立了该问题整体解的指数衰减估计。

关键词: 高阶拟线性波动方程;初边值问题;指数衰减;整体解

中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-8798(2018)05-0353-05

Exponential decay of global solutions for a higher-order quasilinear wave equation

YE Ziqing, YE Yaojun

(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, Zhejiang, China)

Abstract: The initial-boundary value problem is investigated for a class of higher-order quasilinear wave equation with dissipative term. By means of the energy estimates and the multiplier method, the exponential decay estimate of global solutions is established for this problem by applying the integral inequality.

Keywords: higher-order quasilinear wave equation; initial-boundary value problem; exponential decay; global solutions

引言

本文研究以下高阶拟线性波动方程的初边值问题:

$$u_{tt} + \left(a + b \left(\int_{\Omega} |D^m u|^2 dx \right)^{\frac{r-2}{2}} \right) (-\Delta)^m u + \mu u_t = \delta |u|^{r-2} u, x \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i} = 0, i = 0, 1, 2, \dots, m-1, x \in \partial\Omega, t \geq 0. \quad (3)$$

收稿日期: 2018-03-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273016);浙江省自然科学基金项目(LY17A010009)

通信作者: 叶耀军(1965—),男,河南省正阳人,教授,博士,主要从事非线性偏微分方程整体适定性研究。E-mail: yjye2013@163.com。

式(1)~(3)中: $r > 2$ 是实数, $m \geq 1$ 是正整数, $a > 0, b \geq 0, \mu > 0$ 及 $\delta > 0$ 是常数; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域; ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, $\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}$ 表示 u 的 i 阶法向导数; D 表示梯度算子, 即

$$Du = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

此外, 当 $m = 2j$ 时, $D^m u = \Delta^j u$; 当 $m = 2j + 1$ 时, $D^m u = D\Delta^j u$ 。

当 $m = a = 1, b = 0$ 时, 式(1)是具有耗散项的非线性波方程, 许多人用不同的方法和技巧对此类方程的 Cauchy 问题或初边值问题进行了研究, 得到了整体解的存在唯一性及衰减估计, 并建立了解的爆破性质, 如文献[1-4]。在 $a, b > 0$ 的情况下, Ikehata^[5]证明了如果初值 $\{u_0, u_1\}$ 属于稳定集, 并且足够小, 则式(1)~(3)存在整体强解。

当 $m > 1, a, b > 0$ 时, 式(1)具有明确的物理背景, 它描述了受 Kelvin-Voigt 型内部材料阻尼项和线性阻尼项 μu_t 影响的 Woinowsky-Krieger 型振动梁模型^[6-7]。若 $a = 0, b > 0$, Li^[8]和 Ye^[9]研究了带有非线性耗散项的式(1)的初边值问题, 并得到了如下结果: $r > 2$ 时解整体存在; $r < 2$ 时对于任意的负初始能量, 解在有限时间内发生爆破。之后, Messaoudi 等^[10]改进了文献[8]中的结论, 并且证明了当初始能量有上界时与文献[8]有相同的结果。同时, Galaktionov 等^[11]证明了 $\mu = 0$ 时, 式(1)的 Cauchy 问题整体解的存在性和不存在性。然而, 他们的处理方法不能应用于式(1)~(3)。文献[12-15]研究了更广泛的 Kirchhoff 型方程及方程组的初边值问题, 证明了其局部解和整体解的存在性与不存在性, 并建立了整体解的长时间行为。

本文采用常用的记号, $H^m(\Omega)$ 表示通常数量积和范数意义下的 Sobolev 空间, $H_0^m(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^m(\Omega)$ 中的闭包。为简便起见, 用 $\|\cdot\|_s$ 表示 Lebesgue 空间 $L^s(\Omega)$ 范数, $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\Omega)$ 范数, 用等价范数 $\|D^m \cdot\|$ 代替 $H_0^m(\Omega)$ 的范数 $\|\cdot\|_{H_0^m(\Omega)}$ 。 $C_i (i=1, 2, \dots)$ 表示依赖于已知常数的正常数, 并且每次出现时都不相同。

1 预备知识

定义式(1)~(3)解的能量如下:

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{a}{2} \|D^m u\|^2 + \frac{b}{r} \|D^m u\|^r - \frac{\delta}{r} \|u\|_r^r. \quad (4)$$

式(4)中: $u \in H_0^m(\Omega); t \geq 0$ 。

初始总能量为

$$E(0) = \frac{1}{2} \|u_1\|^2 + \frac{a}{2} \|D^m u_0\|^2 + \frac{b}{r} \|D^m u_0\|^r - \frac{\delta}{r} \|u_0\|_r^r.$$

引理 1^[16-17] 设 s 满足: 当 $n \leq 2m$ 时, $2 \leq s < +\infty$; 当 $n > 2m$ 时, $2 \leq s < \frac{2n}{n-2m}$ 。则存在依赖于 Ω 和 s 的常数 B_1 , 使得

$$\|u\|_s \leq B_1 \|D^m u\|, \forall u \in H_0^m(\Omega).$$

引理 2(Young 不等式) 设 X, Y 和 ϵ 是正常数, 并且 $\xi, \zeta \geq 1, \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\zeta} = 1$, 则

$$XY \leq \frac{\epsilon^\xi X^\xi}{\xi} + \frac{Y^\zeta}{\zeta \epsilon^\zeta}.$$

引理 3 令 $u(t)$ 是式(1)~(3)的解, 则 $t > 0$ 时, $E(t)$ 是非增函数, 且

$$E'(t) = -\mu \|u_t\|^2 \leq 0. \quad (5)$$

证明: 在式(1)的两边同乘以 u_t , 并在 $\Omega \times [0, t]$ 上积分, 由分部积分得

$$E(t) = E(0) - \mu \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds, t > 0. \quad (6)$$

由此可知, $E(t)$ 是可积函数的原函数, 故对于任一正则解 $u(t)$, 能量 $E(t)$ 关于 t 绝对连续且满足式(5)。

因此,由稠密性原理知,结论成立。

定理 1~2 给出式(1)~(3)局部解和整体解的存在性结果,其证明过程参见文献[5]。

定理 1(局部存在性) 设 $a > 0, b \geq 0, \mu > 0, \delta > 0$ 。当 $n \leq 2m$ 时, $2 \leq r < +\infty$; 当 $n > 2m$ 时, $2 \leq r < \frac{2n}{n-2m}$ 。如果初值 $(u_0, u_1) \in (H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \times H_0^m(\Omega)$, 则存在 $T > 0$ 使得式(1)~(3)存在唯一的局部解 $u(x, t)$, 并满足

$$u(x, t) \in C([0, T]; H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H_0^m(\Omega)) \cap C^2([0, T]; L^2(\Omega))。$$

此外,下式成立

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|D^m u_t(t)\|^2 + \|D^{2m} u(t)\|^2 = +\infty, t \rightarrow T^-。$$

定理 2(整体存在性) 设 $a > 0, b \geq 0, \mu > 0, \delta > 0$ 。当 $n \leq 2m$ 时, $2 \leq r < +\infty$; 当 $n > 2m$ 时, $2 \leq r < \frac{2n}{n-2m}$ 。进一步假设 $\delta B_1^r \leq b$, 如果初值 $(u_0, u_1) \in (H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \times H_0^m(\Omega)$ 满足 $E(0) \geq \frac{\delta}{r} \|u_0\|_r^r$ 及 $\|D^{2m} u_0\|^2 + \|D^m u_0\|^2 < \gamma$, 则 $T = +\infty$, 其中 $\gamma > 0$ 是常数。

2 指数衰减估计

引理 4 对研究式(1)~(3)整体解的指数衰减估计起着重要的作用。

引理 4^[18] 令 $F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是非增函数, 并假设存在常数 $L > 0$ 使得

$$\int_s^{+\infty} F(t) dt \leq LF(S), 0 \leq S < +\infty,$$

则 $F(t) \leq F(0)e^{1-\frac{t}{L}}, \forall t \geq 0$ 。

本文主要结果叙述如下。

定理 3 在定理 2 的假设条件下, 式(1)~(3)的整体解有如下指数衰减估计:

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\frac{t}{M}}。$$

式中 $M > 0$ 是常数。

证明: 令 $E(t) = E(u(t))$, 如果能够证明整体解的能量满足下列估计

$$\int_s^T E(t) dt \leq ME(s), 0 \leq S < T < +\infty,$$

则由引理 4 可得定理 3 的结果。

注意到假设条件 $\delta B_1^r \leq b$, 由引理 1 得

$$\delta \|u\|_r^r \leq \delta B_1^r \|D^m u\|^r \leq b \|D^m u\|^r, \forall u \in H_0^m(\Omega)。 \quad (7)$$

由于初值 $(u_0, u_1) \in (H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)) \times H_0^m(\Omega)$, 所以式(1)~(3)的解具有足够的正则性保证后续计算。式(1)的两边同时乘以 u , 并在 $\Omega \times [S, T]$ 上积分得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T \int_{\Omega} u(u_{tt} + (a + b \|D^m u\|^{r-2})(-\Delta)^m u + \mu u_t - \delta |u|^{r-2} u) dx dt = \\ &\quad \left[\int_{\Omega} \mu u_t dx \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Omega} 2 |u_t|^2 dx dt + \mu \int_S^T \int_{\Omega} u u_t dx dt + \\ &\quad \int_S^T (\|u_t\|^2 + a \|D^m u\|^2 + b \|D^m u\|^r - \delta \|u\|^r) dt。 \end{aligned} \quad (8)$$

由式(8)知

$$\begin{aligned} &\int_S^T (\|u_t\|^2 + a \|D^m u\|^2 + \frac{2b}{r} \|D^m u\|^r - \frac{2\delta}{r} \|u\|^r) dt + \frac{r-2}{2} \int_S^T (b \|D^m u\|^r - \delta \|u\|_r^r) dt = \\ &\quad - \left[\int_{\Omega} \mu u_t dx \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Omega} (2 |u_t|^2 - \mu u u_t) dx dt。 \end{aligned} \quad (9)$$

根据式(4)、式(7)和式(9)得

$$2 \int_S^T E(t) dt \leq - \left[\int_{\Omega} u u_t dx \right]_S^T + \int_S^T \int_{\Omega} (2 |u_t|^2 - \mu u u_t) dx dt. \quad (10)$$

由式(4)和式(7)知 $E(t) > 0$ 。联合引理 1, 式(4)和 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\left| \int_{\Omega} u(t) u_t(t) dx \right| \leq \|u(t)\| \cdot \|u_t(t)\| \leq B_1 \|D^m u(t)\| \cdot \|u_t(t)\| \leq B_1 \sqrt{\frac{2}{a} E(t)} \cdot \sqrt{2E(t)} = BE(t). \quad (11)$$

式(11)中: $B = \frac{2B_1}{\sqrt{a}}$ 。

应用式(11)和引理 3 有

$$- \left[\int_{\Omega} u u_t dx \right]_S^T = \int_{\Omega} u(S) u_t(S) dx - \int_{\Omega} u(T) u_t(T) dx \leq \left| \int_{\Omega} u(S) u_t(S) dx \right| + \left| \int_{\Omega} u(T) u_t(T) dx \right| \leq BE(S) + BE(T) \leq 2BE(S). \quad (12)$$

由式(10)和式(12)得

$$2 \int_S^T E(t) dt \leq 2BE(S) + \int_S^T \int_{\Omega} (2 |u_t|^2 - \mu u u_t) dx dt. \quad (13)$$

从式(4)、式(5)和引理 2 可推出

$$\int_{\Omega} (2 |u_t|^2 - \mu u u_t) dx \leq 2 \|u_t\|^2 + \|u\| \cdot \|\mu u_t\| \leq \frac{2}{\mu} (-E'(t)) + B_1 \sqrt{\frac{2\mu}{a}} \sqrt{E(t)} \cdot \sqrt{-E'(t)} \leq \epsilon E(t) - C(\epsilon) E'(t). \quad (14)$$

因此, 由式(14)知

$$\begin{aligned} \int_S^T \int_{\Omega} (2 |u_t|^2 - \mu u u_t) dx dt &\leq \epsilon \int_S^T E(t) dt - C(\epsilon) \int_S^T E'(t) dt = \\ &\epsilon \int_S^T E(t) dt + C(\epsilon) [E(S) - E(T)] \leq \epsilon \int_S^T E(t) dt + C(\epsilon) E(S). \end{aligned} \quad (15)$$

由式(13)和式(15)得

$$(2 - \epsilon) \int_S^T E(t) dt \leq [2B + C(\epsilon)] E(S). \quad (16)$$

选取 ϵ 足够小使得 $\epsilon < 2$, 则由式(16)知

$$\int_S^T E(t) dt \leq ME(S). \quad (17)$$

式(17)中: $M = \frac{2B + C(\epsilon)}{2 - \epsilon} > 0$ 是常数。因此由式(17)及引理 4 可得如下指数衰减估计:

$$E(t) \leq E(0) e^{1 - \frac{t}{M}}.$$

定理 3 证毕。

3 结 论

本文研究了式(1)的初边值问题, 在式(1)~(3)解的局部存在(定理 1)和整体存在(定理 2)的前提下, 应用 Komornik 的积分不等式(引理 4)、Cauchy-Schwarz 不等式及能量估计方法, 得到了式(1)~(3)的整体解能量的指数衰减估计(定理 3)。

参考文献:

- [1] LEVINE H A, PARK S R, SERRIN J. Global existence and global nonexistence of solutions of the Cauchy problem for a nonlinear damped wave equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1998(228): 181.
- [2] GERBI S, SAID-HOUARI B. Exponential decay for solutions to semilinear damped wave equation[J]. Discrete and

- Continuous Dynamical System-Series S, 2017, 5(3):559.
- [3] KORPUSOV M O, LUKYANENKO D V. Instantaneous blow-up versus local solvability for one problem of propagation of nonlinear waves in semiconductors[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018(459):159.
- [4] DIMOVA M, KOLKOVSKA N, KUTEV N. Revised concavity method and application to Klein-Gordon equation[J]. Filomat, 2016, 30(3):831.
- [5] IKEHATA R. A note on the global solvability of solutions to some nonlinear wave equations with dissipative terms[J]. Differential and Integral Equations, 1995, 8(3):607.
- [6] AUTUORI G, PUCCI P, SALVATORI M C. Asymptotic stability for nonlinear Kirchhoff systems[J]. Nonlinear Analysis; Real World Applications, 2009(10):889.
- [7] GORAIN G C. Exponential energy decay estimates for the solutions of n-dimensional Kirchhoff type wave equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 177(1):235.
- [8] LI F C. Global existence and blow-up of solutions for a higher-order Kirchhoff-type equation with nonlinear dissipation[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17(12):1409.
- [9] YE Y J. Global existence and energy decay estimate of solutions for a higher-order Kirchhoff type equation with damping and source term[J]. Nonlinear Analysis; Real World Applications, 2013, 14(6):2059.
- [10] MESSAOUDI S A, HOUARI B S. A blow-up result for a higher-order nonlinear Kirchhoff-type hyperbolic equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2007, 20(8):866.
- [11] GALAKTIONOV V A, POHOZAEV S I. Blow-up and critical exponents for nonlinear hyperbolic equations[J]. Nonlinear Analysis; Theory, Method & Applications, 2003, 53(3/4):453.
- [12] YE Y J. Global existence and blow-up of solutions for higher-order viscoelastic wave equation with a nonlinear source term[J]. Nonlinear Analysis, 2015(112):129.
- [13] YE Y J. Blow-up of solutions for a system of higher-order nonlinear Kirchhoff-type equations[J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2017, 40(2):665.
- [14] YE Y J. Global existence and asymptotic behavior of solutions for a system of higher-order Kirchhoff-type equations[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2015(20):1.
- [15] YE Y J. Global existence and energy decay for a coupled system of Kirchhoff type equations with damping and source terms[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2016, 32(3):1.
- [16] WU S T. On coupled nonlinear wave equations of Kirchhoff type with damping and source terms[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2010, 14(2):585.
- [17] ONO K. On global existence, asymptotic stability and blowing up of solutions for some degenerate nonlinear wave equations of Kirchhoff type with a strong dissipation[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1997, 20(2):151.
- [18] KOMORNIK V. Exact controllability and stabilization; the multiplier method[M]. Paris: Masson, 1994:103.