浙江科技学院学报，第 31 卷第 3 期，2019 年 6 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 31 No. 3，Jun. 2019

doi：10.3969/j.issn.1671-8798.2019.03.001

多线性极大算子在 Orlicz 空间的弱有界性估计

张友朋，陶祥兴
（浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

摘　要：Orlicz 空间是一类较具体的 Banach 空间，在 Banach 空间理论和应用的研究中起着非常重要的作用。定义多个单线性分数次极大算子的乘积算子为$\overline{M_\alpha}$，得到$\overline{M_\alpha}$的弱有界性，再利用$\overline{M_\alpha}$控制多线性分数次极大算子，得到多线性分数次极大算子的弱有界性。所得结果扩充了分数次极大算子在 Orlicz 空间的有界性结论。

关键词：Orlicz 空间；多线性极大算子；有界性
中图分类号：O174.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2019)03-0169-06

Weakly bounded estimator for multi-linear maximal operators in Orlicz space

ZHANG Youpeng，TAO Xiangxing
(School of Sciences，Zhejiang University of Science and Technology，Hangzhou 310023，Zhejiang，China)

Abstract：Orlicz space is a specific kind of Banach space，which plays an important role in the research of Banach space theory and application. The product operator of multiple linear fractional maximal operators is defined as $\overline{M_\alpha}$，with its weak boundedness obtained. Then，by using $\overline{M_\alpha}$ to control multi-linear fractional maximal operators，the weak boundedness of multi-linear fractional maximal operators is obtained. The results extend the boundedness of fractional maximal operators in Orlicz space.

Keywords：Orlicz space；multi-linear maximal operators；boundedness

1975 年 Coifman 等[1]研究了双线性奇异积分的有界性，之后多线性算子的研究受到了极大的关注，参见文献[2-7]。其中文献[4]研究了多线性极大算子的加权不等式，文献[5]研究了多线性分数次算子的交换子的加权估计。这不仅是因为线性算子理论推广的需要，更是多线性算子理论本身发展和应用的需要。近年来，Orlicz 空间理论也受到许多研究者的关注，如 Zhao 等[8-11]研究了 Baskakov-Kantorovich 算子、Lupas-Baskakov 型算子等在 Orlicz 空间内的逼近。本文主要研究多线性分数次极大算子 $M_\alpha^{(m)}$ 在 Orlicz 空间上的有界性。

收稿日期：2019-01-25
基金项目：国家自然科学基金项目(11771399，11801509)
通信作者：陶祥兴(1966—　)，男，浙江省台州人，教授，博士，主要从事 PDE 与调和分析技术研究。E-mail：xxtao@zust.edu.cn。

1 预备知识

1.1 定 义

定义 1[12] 称函数 φ:$[0,+\infty)\mapsto[0,+\infty]$是 Young 函数,如果

1)$\varphi(0)=0$;

2)存在 $0<x_0<\infty$ 使得 $\varphi(x_0)<\infty$;

3)φ 单调递增且 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$;

4)φ 是凸函数。

这样定义的函数 φ 有以下一些简单结论:

1)允许 φ 取到 $+\infty$;

2)不要求 φ 是严格凸函数或是严格单调递增函数;但是,当 φ 在有限点 x_0 处取到 $+\infty$ 时,$\varphi(x)$ 必须在 x 充分大时严格单调递增;

3)$\varphi(\infty)=\infty$;

4)要么 φ 在 $[0,+\infty)$ 是连续的,要么存在 $0<b<\infty$ 使得 φ 在 $[0,b)$ 上连续,在 $(b,+\infty]$ 上等价于无穷。特殊地,φ 在 0 处是连续的。

定义 2[12] 给定一个 Young 函数 φ,定义 Orlicz 空间 L^φ 为存在某个 $\lambda>0$ 满足 $\int\varphi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)\mathrm{d}\mu<\infty$ 的所有可测函数 f 的集合。在 L^φ 上定义 Orlicz 范数为

$$\|f\|_\varphi=\inf\left\{\lambda>0:\int\varphi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)\mathrm{d}\mu\leqslant 1\right\}。$$

容易看出,当 $\varphi(x)=x^p\,(1\leqslant p<\infty)$ 时,$L^\varphi=L^p$。

Orlicz 范数有以下一些简单特征和结论。

1)Orlicz 范数是一个范数。它满足正齐次性,$\|\alpha f\|_\varphi=|\alpha|\,\|f\|_\varphi$;满足正定性,$\|f\|_\varphi=0$ 当且仅当 $f=0$;满足次可加性,若 $\|f_1\|_\varphi=\lambda_1$,$\|f_2\|_\varphi=\lambda_2$,则有 $\|f_1+f_2\|_\varphi\leqslant\lambda_1+\lambda_2$。

2)若 φ_1 和 φ_2 是两个 Young 函数,且 $\varphi_1\leqslant\varphi_2$,则有 $\|f\|_{\varphi_1}\leqslant\|f\|_{\varphi_2}$。因此,若存在正常数 a,b 使得 $\varphi_1(ax)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\varphi_1(bx)$ 对所有的 x 成立,则 $L^{\varphi_1}=L^{\varphi_2}$。

3)若 φ_1 和 φ_2 是两个 Young 函数,则 $\varphi\equiv\varphi_1+\varphi_2$ 是一个 Young 函数,且 $L^\varphi=L^{\varphi_1}\cap L^{\varphi_2}$。

令 (X_1,v_1) 和 (X_2,v_2) 为正可测空间,算子 T 定义在 X_1 上的 v_1 可测函数集的一些线性子空间,值域包含在 X_2 上的 v_2 可测函数集里,若存在常数 $c\geqslant 1$ 使得

$$|T(f+g)(x)|\leqslant c(|Tf(x)|+|Tg(x)|)\text{且}|T(\lambda f)(x)|=|\lambda|\,|Tf(x)|$$

对所有算子 T 定义域里的 f 和 g,对所有的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 成立,则称算子 T 是线性算子[13]。

令 A 和 B 为 Young 函数,T 为定义在 $L^A(X_1,v_1)$ 上的单线性算子,则

1)若存在正常数 k 使得

$$\|Tf\|_{L^B(X_2,v_2)}\leqslant k\|f\|_{L^A(X_1,v_1)}$$

对所有的 $f\in L^A(X_1,v_1)$ 成立,则算子 T 称为强 (A,B) 型的;

2)若存在正常数 k 使得

$$v_2(\{y\in X_2:|Tf(y)|>t\})\leqslant\frac{1}{B\left(\frac{t}{k\|f\|_{L^A(X_1,v_1)}}\right)}$$

对所有的 $t>0$ 和所有的 $f\in L^A(X_1,v_1)$ 成立,则算子 T 称为弱 (A,B) 型的。

我们可以将其推广到双线性算子,甚至是多线性算子。

令 A_1,A_2 和 B 为 Young 函数,T 为定义在 $L^{A_1}(X_1,v_1)\times L^{A_2}(X_1,v_1)$ 上的双线性算子,则

1)若存在正常数 k 使得

$$\|T(f_1,f_2)\|_{L^B(X_2,v_2)}\leqslant k\|f_1\|_{L^{A_1}(X_1,v_1)}\|f_2\|_{L^{A_2}(X_1,v_1)}$$

对所有的 $f_1\in L^{A_1}(X_1,v_1)$，$f_2\in L^{A_2}(X_1,v_1)$成立，则称算子 T 为强$(A_1;A_2,B)$型的；

2)若存在正常数 k 使得

$$v_2(\{y\in X_2: |T(f_1,f_2)(y)|>t\})\leqslant \frac{1}{B\left(\frac{t}{k\|f_1\|_{L^{A_1}(X_1,v_1)}\|f_2\|_{L^{A_2}(X_1,v_1)}}\right)}$$

对所有的 $t>0$ 和 $f_1\in L^{A_1}(X_1,v_1)$，$f_2\in L^{A_2}(X_1,v_1)$成立，则称算子 T 为弱$(A_1;A_2,B)$型的。

定义 3[14]　令 n 和 m 分别为满足 $n\geqslant 2$，$m\geqslant 1$ 的非负整数，且 $0<\alpha<mn$，则多线性分数次极大算子 $M_\alpha^{(m)}$ 定义为

$$M_\alpha^{(m)}\left(\vec{f}\right)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r^{mn-\alpha}}\int_{|\vec{y}|<r}\prod_{i=1}^{m}|f_i(x-y_i)|\,\mathrm{d}\vec{y},$$

其中$\vec{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$且 $x,y_1,y_2,\cdots,y_m\in\mathbb{R}^n$，$\mathrm{d}\vec{y}=\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_m$，$\vec{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$。

特殊地，若 $m=1$，则 $M_\alpha^{(m)}$ 就是经典的分数次极大算子 M_α。下面我们主要讨论 $m=2$ 的情形。

1.2 引　理

文献[13]分别给出了分数次极大算子 M_α 以及分数次积分算子 I_α 在 Orlicz 空间里的弱有界性估计和强有界性估计。这里引用了其中的分数次极大算子 M_α 的弱有界性估计。

引理 1[13]　令 $n\geqslant 1$，且 $0\leqslant\alpha<n$，令 A,B 为 Young 函数。则存在常数 k 使得

$$|\{M_\alpha f(x)>\lambda\}|\leqslant\frac{1}{B\left(\frac{\lambda}{k\|f\|_A}\right)}$$

成立，当且仅当存在常数 c 满足

$$A^{-1}(t)\leqslant ct^{\frac{\alpha}{n}}B^{-1}(t)。$$

引理 2　若算子 G_i 为(p_i,q_i)型，即

$$\|G_if\|_{L^{q_i,\infty}}\leqslant c\|f\|_{L^{p_i}},$$

则

$$\prod_{i=1}G_i(f_i)(x)\in L^{q,\infty},$$

其中 $\dfrac{1}{q}=\sum\limits_{i=1}\dfrac{1}{q_i}$，且

$$\left\|\prod_{i=1}G_i(f_i)\right\|_{L^{q,\infty}}\leqslant\left(\frac{1}{\lambda}\prod_{i=1}\|f_i\|_{p_i}\right)^q。$$

证明：不妨证 $i=2$ 的情况。$\forall\beta>0$，有

$$|\{G_1(f_1)(x)\cdot G_2(f_2)(x)>\lambda\}|\leqslant|\{G_1(f_1)(x)>\beta\}|+\left|\left\{G_2(f_2)(x)>\frac{\lambda}{\beta}\right\}\right|\leqslant$$
$$\left(\frac{c_1}{\beta}\|f_1\|_{p_1}\right)^{q_1}+\left(\frac{c_2\beta}{\lambda}\|f_2\|_{p_2}\right)^{q_2}。$$

令 $\left(\dfrac{c_1}{\beta}\|f_1\|_{p_1}\right)^{q_1}=\left(\dfrac{c_2\beta}{\lambda}\|f_2\|_{p_2}\right)^{q_2}$，求得

$$\beta=\lambda^{\frac{q_2}{q_1+q_2}}\left\|f_1\right\|_{p_1}^{\frac{q_1}{q_1+q_2}}\left\|f_2\right\|_{p_2}^{-\frac{q_2}{q_1+q_2}},$$

故

$$|\{G_1(f_1)(x)\cdot G_2(f_2)(x)>\lambda\}|\leqslant\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_1+q_2}}\left\|f_1\right\|_{p_1}^{\frac{q_1q_2}{q_1+q_2}}\left\|f_2\right\|_{p_2}^{\frac{q_1q_2}{q_1+q_2}}=\left(\frac{1}{\lambda}\|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\right)^q。$$

引理 2　证毕。

这是当算子 G_i 为(p_i,q_i)型时成立，则当算子 G_i 为弱(p_i,q_i)型时也成立，故引出了下面的**命题 1** 以及**定理 1**。

2 主要结论

命题 1 设

$$\overline{M_\alpha}\left(\vec{f}\right)(x)=\prod_{i=1}^{m}M_{\alpha_i}(f_i)(x),$$

其中 $\alpha=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i,\alpha_i>0$。那么存在 $k_0>0$,对任意的 $t>0$,使得

$$\left|\left\{\overline{M_\alpha}\left(\vec{f}\right)(x)>t\right\}\right|\leqslant\frac{1}{B\left(\dfrac{t}{mk_0\prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_{A_i}}\right)}$$

成立,即 $\overline{M_\alpha}$ 是 $L^{A_1}\times\cdots\times L^{A_m}$ 到 $L^{B,\infty}$ 有界的,当存在 $\tilde{k}$ 使得

$$\prod_{i=1}^{m}B_i^{-1}(r)\leqslant\tilde{k}B^{-1}(r),$$

对任意的 $r>0$ 成立。

由于

$$M_\alpha\left(\vec{f}\right)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B_r|^{1-\frac{\alpha}{mn}}}\int_{B_r}\prod_{i=1}^{m}|f_i(x-y_i)|\,\mathrm{d}y_i,$$

故 $M_\alpha\left(\vec{f}\right)(x)\leqslant c_{m,n,\alpha}\overline{M_\alpha}\left(\vec{f}\right)(x)$,上述结果对 M_α 也成立。

定理 1 设 $A_i(i=1,\cdots,m)$,B 是 Young 函数,$0\leqslant\alpha<mn$,则存在常数 c_1 使得

$$\left|\left\{x\left|M_\alpha\left(\vec{f}\right)(x)>\lambda\right.\right\}\right|\leqslant\frac{1}{B\left(\dfrac{\lambda}{c_1\prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_{A_i}}\right)}$$

成立,当且仅当存在常数 c_2 满足

$$\prod_{i=1}^{m}A_i^{-1}(r)\leqslant c_2r^{\frac{\alpha}{n}}B^{-1}(r),\forall r>0。$$

命题 1 的证明:

$$\left|\left\{\overline{M_\alpha}\left(\vec{f}\right)(x)>\lambda\right\}\right|=\left|\left\{\prod_{i=1}^{m}M_{\alpha_i}(f_i)(x)>\lambda\right\}\right|\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m-1}|\{M_{\alpha_i}(f_i)>\mu_i\}|+\left|\left\{M_{\alpha_m}(f_m)>\frac{\lambda}{\prod_{i=1}^{m-1}\mu_i}\right\}\right|\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{B_i\left(\dfrac{\mu_i}{K_i\gamma_i}\right)}+\frac{1}{B_m\left(\dfrac{\lambda}{K_m\gamma_m\prod_{i=1}^{m-1}\mu_i}\right)}。$$

其中 $\gamma_i=\|f_i\|_{A_i}$。令 $\mu_i=B_i^{-1}\left(B\left(\dfrac{\lambda}{K_0\gamma}\right)\right)K_i\gamma_i,\gamma=\prod_{i=1}^{m}\gamma_i$,则一方面

$$B_i\left(\frac{\mu_i}{K_i\gamma_i}\right)=B_i\left(B_i^{-1}\left(B\left(\frac{\lambda}{K_0\gamma}\right)\right)\right)=B\left(\frac{\lambda}{K_0\gamma}\right),i=1,2,\cdots,m。$$

另一方面,

$$B_m\left(\frac{\lambda}{K_m\gamma_m\prod_{i=1}^{m-1}\mu_i}\right)=B_m\left(\frac{\lambda}{K_m\gamma_m\prod_{i=1}^{m-1}B_i^{-1}\left(B\left(\dfrac{\lambda}{K_0\gamma}\right)\right)K_i\gamma_i}\right)=$$

$$B_m\left(\frac{\lambda}{K\gamma\prod_{i=1}^{m-1}B_i^{-1}\left(B\left(\frac{\lambda}{K_0\gamma}\right)\right)}\right)=B_m\left(\frac{K_0 t}{K\prod_{i=1}^{m-1}B_i^{-1}(B(t))}\right)。$$

其中 $t=\frac{\lambda}{K_0\gamma}$。取 $K_0=\tilde{k}K$，则

$$B_m\left(\frac{\lambda}{K_m\gamma_m\prod_{i=1}^{m-1}\mu_i}\right)=B_m\left(\frac{\tilde{k}t}{\prod_{i=1}^{m-1}B_i^{-1}(B(t))}\right)。$$

由于 $\prod_{i=1}^{m}B_i^{-1}(r)\leqslant\tilde{k}B^{-1}(r)$，因此有

$$B_m^{-1}(B(t))\leqslant\frac{\tilde{k}t}{\prod_{i=1}^{m-1}B_i^{-1}(B(t))},$$

$$B(t)\leqslant B_m\left(\frac{\tilde{k}t}{\prod_{i=1}^{m-1}B_i^{-1}(B(t))}\right),$$

故

$$B_m\left(\frac{\lambda}{K_m\gamma_m\prod_{i=1}^{m-1}\mu_i}\right)\geqslant B\left(\frac{\lambda}{K_0\gamma}\right)。$$

从而

$$\left|\left\{\overline{M_\alpha}\left(\vec{f}\right)(x)>\lambda\right\}\right|\leqslant\frac{m-1}{B\left(\frac{\lambda}{K_0\gamma}\right)}+\frac{1}{B\left(\frac{\lambda}{K_0\gamma}\right)}=\frac{m}{B\left(\frac{\lambda}{K_0\gamma}\right)}=\frac{1}{B\left(\frac{\lambda}{mK_0\gamma}\right)}。$$

命题 1 得证。

定理 1 的证明：充分性的证明同**命题 1** 的证明。下证必要性。

固定半径为 r_0 的球 $B_0\subset\mathbb{R}^n$，取 $f_{0i}=A_i^{-1}\left(\frac{1}{|B_0|}\right)\chi_{B_0}$，$i=1,2,\cdots,m$。则对 $x\in B_0$，

$$M_\alpha\left(\vec{f_0}\right)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B_r|^{1-\frac{\alpha}{mn}}}\int_{B_r}\prod_{i=1}^{m}|f_{0i}(x-y_i)|\mathrm{d}y_i\geqslant$$

$$\sup_{r>0}\frac{1}{|B_r|^{1-\frac{\alpha}{mn}}}\int_{\sum_{i=1}^{m}(z_i-x)^2<r^2}\prod_{i=1}^{m}|f_{0i}(z_i)|\mathrm{d}z_i\geqslant$$

$$\sup_{r>0}\frac{1}{|B_r|^{1-\frac{\alpha}{mn}}}\prod_{i=1}^{m}\int_{|z_i-x|<\frac{r}{\sqrt{m}}}|f_{0i}(z_i)|\mathrm{d}z_i\geqslant$$

$$\frac{c_{m,n,\alpha}}{|B_0|^{m-\frac{\alpha}{n}}}|B_0|^m\prod_{i=1}^{m}A_i^{-1}\left(\frac{1}{|B_0|}\right)。$$

其中 $r=2r_0\sqrt{m}$。令 $|B_0|=\frac{1}{t}$，则

$$\frac{1}{t}\leqslant\left|\left\{M_\alpha\left(\vec{f_0}\right)(x)>c_{m,n,\alpha}t^{-\frac{\alpha}{n}}\prod_{i=1}^{m}A_i^{-1}(t)\right\}\right|\leqslant\frac{1}{B\left(\frac{c_{m,n,\alpha}t^{-\frac{\alpha}{n}}\prod_{i=1}^{m}A_i^{-1}(t)}{c\gamma}\right)},$$

其中 $\gamma=\prod_{i=1}^{m}\|f_{0i}\|_{A_i}\leqslant 1$，所以

$$\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{B\left(\frac{c_{m,n,\alpha}t^{-\frac{\alpha}{n}}\prod_{i=1}^{m}A_i^{-1}(t)}{c}\right)}$$

即

$$B\left(\frac{c_{m,n,\alpha}t^{-\frac{\alpha}{n}}\prod_{i=1}^{m}A_i^{-1}(t)}{c}\right)\leqslant t,$$

$$c_{m,n,\alpha}t^{-\frac{\alpha}{n}}\prod_{i=1}^{m}A_i^{-1}(t)\leqslant cB^{-1}(t)。$$

定理1 证毕。

3 结 语

本文给出了多线性分数次极大算子在Orlicz空间的弱有界性,在今后的研究中可探究多线性分数次极大算子在Orlicz空间的强有界性以及其他多线性算子的有界性。

参考文献:

[1] COFIMAN R R, MEYER C Y. On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1975,212:315.

[2] KENIG C E, STEIN E M. Multilinear estimates and fractional integration[J]. Mathematical Reserch Letters, 1999, 6(1):467.

[3] GRAFAKOS L, TORRES R H. Multilinear Calderón-Zygmund theory[J]. Advances In Mathematics, 2002,165:124.

[4] GRAFAKOS L, TORRES R H. Maximal operator and weighted norm inequalities for multilinear singular integrals [J]. Indiana University Mathematics Journal, 2002,51(5):1261.

[5] SI Z Y, LU S Z. Weighted estimates for iterated commutators of multilinear fractional operators[J]. Acta Mathematica Sinica, 2012,28(9):1769.

[6] BUI T A, DUONG X T. Weighted norm inequalities for multilinear operators and applications to multilinear Fourier multipliers[J]. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2013,137(1):63.

[7] WANG Y S, HE Y X. Multilinear fractional integrals and commutators on generalized Herz spaces[J]. Analysis in Theory and Applications, 2016,32(2):103.

[8] ZHAO J J, WU G R D. 一类推广的 Bernstein-Kantorovich 算子在 Orlicz 空间内的逼近[J]. 集宁师范学院学报, 2015,37(3):105.

[9] ZHANG S L,WU G R D. 一种推广的 Baskakov-Kantorovich 算子在 Orlicz 空间内的逼近性质[J]. 内蒙古农业大学学报(自然科学版),2015,36(4):160.

[10] GAO Y,WU G R D. Lupas-Baskakov 型算子在 Orlicz 空间内逼近的强逆不等式[J]. 应用泛函分析学报,2018,20(1):47.

[11] GAO Y,WU G R D. Lupas-Baskakov 型算子在 Orlicz 空间内的逼近[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2018,47(2):102.

[12] WILSON M. Weighted Littlewood-Paley theory and exponential-square integrability[M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008:161-162.

[13] CIANCHI A. Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1999,60(1):188-189.

[14] TAO X X, SHI Y L. Multi-weighted boundedness for multilinear rough fractional integrals and maximal operators [J]. Journal of Mathematical Inequalities, 2015,9(1):219.