浙江科技学院学报，第 34 卷第 1 期，2022 年 2 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 34 No. 1，Feb. 2022

doi：10.3969/j.issn.1671-8798.2022.01.001

一类 H-Toeplitz 算子的复对称性

陈　泳[1,2]，赖丽玲[1]，梁金金[1]
（1.浙江师范大学 数学与计算机科学学院，浙江 金华 321004；2.杭州师范大学 数学学院，杭州 311121）

摘　要：为研究 Bergman 空间上一类 H-Toeplitz 算子关于给定的某类复共轭的复对称性，提出选用特殊符号的算子来研究。由于 H-Toeplitz 算子与 Toeplitz 算子及 Hankel 算子之间存在紧密联系，因此，首先，借鉴经典 Hardy 空间上 Toeplitz 算子中已有的关于某些复共轭的复对称结果，找出具体的复共轭；其次，由于完全刻画一些具体算子的复对称性极其困难，故通过考察调和函数符号或非调和函数符号的 H-Toeplitz 算子，来研究该算子关于给定的复共轭的复对称性；最后，根据算子复共轭定义中的等距关系，得到一个有关算子符号的等式，并对此等式进行计算以找出规律。结果表明，当符号为调和函数符号或由拟齐次函数的和组成的非调和函数符号时，对应的 H-Toeplitz 算子关于给定的复共轭为复对称当且仅当该符号为零。

关键词：H-Toeplitz 算子；Bergman 空间；复共轭；复对称性
中图分类号：O177.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2022)01-0001-06

Complex symmetry for a class of H-Toeplitz operator

CHEN Yong[1,2]，LAI Liling[1]，LIANG Jinjin[1]
(1. College of Mathematics and Computer Science，Zhejiang Normal University，Jinhua 321004，Zhejiang，China；
2. College of Mathematics，Hangzhou Normal University，Hangzhou 311121，Zhejiang，China)

Abstract：In order to study the complex symmetry for a class of H-Toeplitz operator on Bergman space with regard to a given class of conjugation，a special coincidence operator was proposed. Given the fact that H-Toeplitz operator is closely related to Toeplitz operator and Hankel operator，firstly，the specific conjugation was found according to the existing complex symmetry results of Toeplitz operator on classical Hardy space. Secondly，given the great difficulty to completely characterize the complex symmetry of some specific operators，the H-Toeplitz operator with harmonic or non-harmonic symbols was investigated to study the complex symmetry of the operator with respect to the specific conjugation. Finally，according to the isometry relation defined in the conjugation，a correlation equation about operator symbol was obtained，from which arose some rules through calculation. The results show that the

收稿日期：2021-12-07
基金项目：国家自然科学基金项目(11771401)
通信作者：陈　泳(1976—　)，男，浙江省余姚人，教授，博士，主要从事算子理论研究。E-mail：ychen@hznu.edu.cn。

H-Toeplitz operator with harmonic symbol or non-harmonic symbol consisting of the sum of quasihomogeneous functions is complex symmetric with respect to the given conjugation if and only if the symbol is zero.

Keywords：H-Toeplitz operator；Bergman space；conjugation；complex symmetry

Garcia 和 Putinar 在 2005 年开始研究算子的复对称[1]，在他们之后的学者取得了大量的关于抽象复对称算子的结构理论和具体算子的复对称性研究成果。由于完全刻画一些具体算子的复对称性极其困难，故通过找出具体的复共轭 C，再刻画算子关于此 C 为复对称的研究方法。经典 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子 T_ϕ 为 C_λ-对称当且仅当 $\phi(\lambda z)=\phi(\bar{z})$[2]。之后 Li 等[3]研究了 T_ϕ 的 C_α-对称性，若 T_ϕ 为 C_α-对称，则 α 是一个自然几何对序列。Bu 等[4]证明了 Hardy 空间上 Toeplitz 算子 T_ϕ 关于某 C_α 复对称当且仅当其关于某 C_λ 复对称。对 Bergman 空间上 Toeplitz 算子复对称性的研究比 Hardy 空间更困难[5-6]，而对 H-Toeplitz 算子的研究是近年来才开展的。Gupta 等[7]研究了 Bergman 空间上的 H-Toeplitz 算子的一些代数性质，但目前尚留有很多相关问题亟待深入研究。因此本研究探讨 Bergman 空间上一类 H-Toeplitz 算子关于给定复共轭 C_α 的复对称性。

1 预备知识

1.1 研究背景

记$\mathbb{D}$为复平面$\mathbb{C}$内的单位开圆盘，$\mathrm{d}A(z)=\frac{1}{\pi}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 为$\mathbb{D}$上规范化的 Lebesgue 面积测度。记 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 为$\mathbb{D}$上所有勒贝格平方可积函数所构成的 Hilbert 空间，其内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{D}}f(z)\,\overline{g(z)}\mathrm{d}A(z),f,g\in L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)。$$

记 $H(\mathbb{D})$ 为$\mathbb{D}$上所有解析函数的空间，Bergman空间 $L_a^2(\mathbb{D})=L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)\cap H(\mathbb{D})$ 是空间 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 的闭子空间。对于非负整数 n，令 $e_n(z)=\sqrt{n+1}z^n,z\in\mathbb{D}$。集合 $\{e_n\}_{n\geqslant 0}$ 构成 $L_a^2(\mathbb{D})$ 的一组标准正交基。Bergman 空间为再生核解析函数空间，其再生核为 $K_z(w)=\frac{1}{(1-\bar{z}w)^2},z,w\in\mathbb{D}$。记 $P:L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)\to L_a^2(\mathbb{D})$ 为空间 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 到 Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{D})$ 上的正交投影。对于 $f\in L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$，由再生核性质有

$$P(f)(z)=\langle f,K_z\rangle=\int_{\mathbb{D}}\frac{f(w)}{(1-z\,\overline{w})^2}\mathrm{d}A(w)。\tag{1}$$

对于 $\phi\in L^\infty(\mathbb{D})$，乘法算子 M_ϕ 定义为 $M_\phi(f)=\phi f$。符号为 $\phi\in L^\infty(\mathbb{D})$ 的 Toeplitz 算子[8-9] T_ϕ：$L_a^2(\mathbb{D})\to L_a^2(\mathbb{D})$ 和 Hankel 算子 $H_\phi:L_a^2(\mathbb{D})\to L_a^2(\mathbb{D})$ 分别定义为

$$T_\phi=PM_\phi,H_\phi=PM_\phi J,$$

其中算子 $J:L_a^2(\mathbb{D})\to\overline{L_a^2(\mathbb{D})}$ 由 $J(e_n)=\overline{e_{n+1}}(n\geqslant 0)$ 给出。易见 T_ϕ 和 H_ϕ 都是 Bergman空间 $L_a^2(\mathbb{D})$ 上的有界线性算子[10-12]。

定义 Bergman空间 $L_a^2(\mathbb{D})$ 上的 H-Toeplitz算子。记 $L_h^2(\mathbb{D})$ 为 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 中所有调和函数构成的闭子空间。首先考虑由以下两式定义的线性算子 $K:L_a^2(\mathbb{D})\to L_h^2(\mathbb{D})$，

$$K(e_{2n})=e_n,K(e_{2n+1})=\overline{e_{n+1}},n=0,1,2,\cdots。$$

算子 K 在 $L_a^2(\mathbb{D})$ 上是有界的，$\|K\|=1$ 且 K 的共轭算子 $K^*:L_h^2(\mathbb{D})\to L_a^2(\mathbb{D})$ 由以下二式给出：

$$K^*(e_n)=e_{2n},K^*(\overline{e_{n+1}})=e_{2n+1},n\geqslant 0。$$

对于 $\phi\in L^\infty(\mathbb{D})$，Bergman 空间上的 H-Toeplitz 算子 $B_\phi:L_a^2(\mathbb{D})\to L_a^2(\mathbb{D})$ 定义为

$$B_\phi=PM_\phi K。$$

由定义可以看出，H-Toeplitz算子与 Toeplitz算子和Hankel算子紧密联系。事实上，对于每个非负整数 n，有

$$B_\phi(e_{2n}) = PM_\phi K(e_{2n}) = PM_\phi(e_n) = T_\phi(e_n);\tag{2}$$

$$B_\phi(e_{2n+1}) = PM_\phi K(e_{2n+1}) = PM_\phi J(e_n) = H_\phi(e_n)。\tag{3}$$

令$\mathcal{H}$表示复可分 Hilbert 空间，$B(\mathcal{H})$ 表示由$\mathcal{H}$上所有有界线性算子组成的代数。共轭线性映射 $C:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 称为复共轭，若其满足：

1）$\langle Cf, Cg\rangle = \langle g, f\rangle, \forall f, g\in\mathcal{H}$；

2）$C^2 = I$，即 C 是对合。

若 $T\in B(\mathcal{H})$ 满足 $CTC = T^*$，则称 T 关于复共轭 C 是复对称的，或 T 是 C- 对称的，简称 T 是复对称的。复对称算子类有大量的例子，包括所有的正规算子、有限 Toeplitz 矩阵、截断 Toeplitz 算子、调和 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子和 Volterra 积分算子等。

令 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\cdots)$，其中每个 $|\alpha_n| = 1, n = 0,1,2\cdots$。定义复共轭 C_α 为

$$C_\alpha e_n = \alpha_n e_n, n = 0,1,2\cdots。$$

令 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in L_a^2(\mathbb{D})$，有

$$(C_\alpha f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\,\overline{a_n} z^n。$$

特别地，当 $\alpha_n = \bar{\lambda}^n$，其中常数 $|\lambda| = 1$，此时的 C_α 记为 C_λ，即

$$(C_\lambda f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\bar{\lambda}^n\,\overline{a_n} z^n。$$

对于函数 $\phi\in L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A)$，如果满足 $\phi(z) = \phi(|z|), z\in\mathbb{D}$，那么 ϕ 称为径向函数。对于整数 p，若 $\phi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta}\varphi(r)$，其中 φ 是一个径向函数，则函数 ϕ 称为 p 次拟齐次的。对于一般的函数 $\phi\in L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A)$，有下面的拟齐次函数分解：

$$\phi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\varphi_k(r)。\tag{4}$$

其中每个 φ_k 为径向函数，

$$\varphi_k(r) = \int_0^{2\pi}\phi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\pi}\in L^2([0,1], r\mathrm{d}r)。$$

特别地，当每个 $\varphi_k(r) = a_k r^{|k|}$ 时，$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\bar{z}^k$ 为调和函数，即 $\phi\in L_h^2(\mathbb{D})$[13-14]。

1.2　引　理

引理 1　对于非负整数 s 和 t，有以下公式成立：

$$\langle z^s, z^t\rangle = \begin{cases}\dfrac{1}{s+1}, s = t;\\ 0, s\neq t。\end{cases}$$

$$P(\bar{z}^t z^s) = \begin{cases}\dfrac{s-t+1}{s+1} z^{s-t}, s\geqslant t;\\ 0, s < t。\end{cases}$$

对于调和符号的 H-Toeplitz 算子，有以下结论。

引理 2　令 $\phi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i + \sum_{j=1}^{\infty} b_j\,\bar{z}^j\in L^\infty(\mathbb{D})$，则对非负整数 m 和 n，

$$\langle B_\phi(e_{2n}), e_m\rangle = \langle T_\phi(e_n), e_m\rangle = \begin{cases}\sqrt{\dfrac{n+1}{m+1}}\,a_{m-n}, m\geqslant n;\\ \sqrt{\dfrac{m+1}{n+1}}\,b_{n-m}, m < n。\end{cases}$$

和

$$\langle B_{\phi}(e_{2n+1}),e_m\rangle=\langle H_{\phi}(e_n),e_m\rangle=\frac{\sqrt{m+1}\ \sqrt{n+2}}{m+n+2}a_{m+n+1}。$$

证明:首先有

$$\langle T_{\phi}(e_n),e_m\rangle=\langle P(\phi e_n),e_m\rangle=\sqrt{n+1}\ \sqrt{m+1}\langle(\sum_{i=0}^{\infty}a_iz^i+\sum_{j=1}^{\infty}b_j\,\bar{z}^j)z^n,z^m\rangle=$$
$$\sqrt{n+1}\ \sqrt{m+1}(\sum_{i=0}^{\infty}a_i\langle z^{i+n},z^m\rangle+\sum_{j=1}^{\infty}\langle b_jz^n,z^{m+j}\rangle)。$$

由**引理 1**,当 $m\geqslant n$ 时有

$$\langle T_{\phi}(e_n),e_m\rangle=\sqrt{n+1}\ \sqrt{m+1}\ \sum_{i=0}^{\infty}a_i\langle z^{i+n},z^m\rangle=\sqrt{n+1}\ \sqrt{m+1}\ \frac{1}{m+1}a_{m-n}=\sqrt{\frac{n+1}{m+1}}a_{m-n};$$

而当 $m<n$ 时有

$$\langle T_{\phi}(e_n),e_m\rangle=\sqrt{n+1}\ \sqrt{m+1}\ \sum_{j=1}^{\infty}\langle b_jz^n,z^{m+j}\rangle=\sqrt{n+1}\ \sqrt{m+1}\ \frac{1}{n+1}b_{n-m}=\sqrt{\frac{m+1}{n+1}}b_{n-m}。$$

对于 Hankel 算子,类似有

$$\langle H_{\phi}(e_n),e_m\rangle=\langle PM_{\phi}J(e_n),e_m\rangle=\sqrt{n+2}\ \sqrt{m+1}\langle(\sum_{i=0}^{\infty}a_iz^i+\sum_{j=1}^{\infty}b_j\,\bar{z}^j)\,\bar{z}^{n+1},z^m\rangle=$$
$$\sqrt{n+2}\ \sqrt{m+1}(\sum_{i=0}^{\infty}a_i\langle z^i,z^{m+n+1}\rangle+\sum_{j=1}^{\infty}b_j\langle\bar{z}^j,z^{m+n+1}\rangle)=\frac{\sqrt{m+1}\ \sqrt{n+2}}{m+n+2}a_{m+n+1}。$$

由此及前面的证明,结合式(2)～(3)即知**引理 2** 的结论成立。

为了证明**定理 2**,需要下面关于拟齐次符号 H-Toeplitz 算子的结论。

引理 3 令 p 为整数,n 为非负整数,φ 为有界径向函数,则以下结论成立:

$$B_{e^{ip\theta}\varphi}(z^{2n})=\begin{cases}2\sqrt{\dfrac{n+1}{2n+1}}(n+p+1)\,\hat{\varphi}(2n+p+2)z^{n+p},n+p\geqslant 0;\\0,n+p<0。\end{cases}$$

$$B_{e^{ip\theta}\varphi}(z^{2n+1})=\begin{cases}2\sqrt{\dfrac{n+2}{2n+1}}(p-n)\,\hat{\varphi}(p+2)z^{p-1-n},n+1\leqslant p;\\0,n+1>p。\end{cases}$$

证明:注意到 $K_z(w)=\sum_{j=0}^{\infty}(1+j)\,\bar{z}^jw^j$,则利用再生核公式(1),当 $n+p\geqslant 0$ 时,有

$$B_{e^{ip\theta}\varphi}(z^{2n})=PM_{e^{ip\theta}\varphi}K(z^{2n})=\sqrt{\frac{2n+2}{4n+2}}PM_{e^{ip\theta}\varphi}(z^{2n})=$$
$$\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\int_{\mathbb{D}}e^{ip\theta}\varphi(w)w^n\ \sum_{j=0}^{\infty}(1+j)\,\overline{w}^jz^j\,\mathrm{d}A(w)=$$
$$\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\ \sum_{j=0}^{\infty}\int_0^1\int_0^{2\pi}e^{i(p+n-j)\theta}\varphi(r)r^{n+j+1}(1+j)z^j\ \frac{1}{\pi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=$$
$$\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}(2n+2p+2)z^{n+p}\int_0^1\varphi(r)r^{2n+p+1}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=$$
$$2\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}(n+p+1)\,\hat{\varphi}(2n+p+2)z^{n+p}。$$

当 $n+p<0$ 时,由上述计算过程可知 $B_{e^{ip\theta}\varphi}(z^{2n})=0$。同理,当 $n+1\leqslant p$ 时,

$$B_{e^{ip\theta}\varphi}(z^{2n+1})=PM_{e^{ip\theta}\varphi}K(z^{2n+1})=\sqrt{\frac{2n+4}{4n+4}}PM_{e^{ip\theta}\varphi}\,\bar{z}^{n+1}=$$
$$\sqrt{\frac{n+2}{2n+2}}\int_{\mathbb{D}}e^{ip\theta}\varphi(w)\,\overline{w}^{n+1}\ \sum_{j=0}^{\infty}(1+j)\,\overline{w}^jz^j\,\mathrm{d}A(w)=$$
$$\sqrt{\frac{n+2}{2n+2}}\ \sum_{j=0}^{\infty}\int_0^1\int_0^{2\pi}e^{i(p-n-j-1)\theta}\varphi(r)r^{n+j+2}(1+j)z^j\frac{1}{\pi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=$$

$$\sqrt{\frac{n+2}{2n+2}}(2p-2n)z^{p-1-n}\int_0^1\varphi(r)r^{p+1}\mathrm{d}r=$$

$$2\sqrt{\frac{n+2}{2n+2}}(p-n)\hat{\varphi}(p+2)z^{p-1-n}。$$

当 $n+1>p$ 时，由上述计算过程可知 $B_{e^{ip\theta}\varphi}(z^{2n+1})=0$。综上即知结论成立。

函数 $\varphi\in L^1([0,1],r\mathrm{d}r)$ 的 Mellin 变换 $\hat{\varphi}$ 定义如下：

$$\hat{\varphi}(z)=\int_0^1\varphi(r)r^{z-1}\mathrm{d}r。$$

显然，φ 的 Mellin 变换 $\hat{\varphi}$ 定义在半平面 $\{z:\mathrm{Re}z\geqslant 2\}$ 上。对于 Mellin 变换，有以下的重要结论[15-16]。

引理 4　令 $\varphi\in L^1([0,1],r\mathrm{d}r)$，如果存在正整数 n_0、p，对所有的正整数 k 都有 $\hat{\varphi}(n_0+pk)=0$，那么 $\varphi=0$。

本研究首先考虑调和函数符号的 H-Toeplitz 算子关于复共轭 C_α 的复对称性。

2　主要结果

定理 1　设 $\phi\in L^\infty(\mathbb{D})$ 为调和函数，则 B_ϕ 为 C_α- 对称当且仅当 $\phi=0$。

证明：充分性显然，下证必要性。设 $\phi(z)=\sum_{k=0}^\infty a_k z^k+\sum_{j=1}^\infty b_j\bar{z}^j$，则由 $\phi\in L^2(\mathbb{D})$ 可知 $\sum_k\frac{|a_k|^2}{k+1}+\sum_j\frac{|b_j|^2}{j+1}<\infty$，再由此即知当 $k,j\to\infty$，有 $a_k\to 0$，$b_j\to 0$。设 B_ϕ 关于 C_α- 复对称，即 $C_\alpha B_\phi C_\alpha=B_\phi^*$。由**引理 2** 可知对非负整数 m、n，

$$\langle e_{2m+1},C_\alpha B_\phi C_\alpha e_{2n}\rangle=\langle B_\phi C_\alpha e_{2n},C_\alpha e_{2m+1}\rangle=\alpha_{2n}\overline{\alpha_{2m+1}}\langle B_\phi e_{2n},e_{2m+1}\rangle=$$

$$\alpha_{2n}\overline{\alpha_{2m+1}}\begin{cases}\sqrt{\dfrac{n+1}{2m+2}}a_{2m+1-n}, & 2m+1\geqslant n;\\ \sqrt{\dfrac{2m+2}{n+1}}b_{n-2m-1}, & 2m+1<n。\end{cases}$$

$$\langle e_{2m+1},B_\phi^* e_{2n}\rangle=\langle e_{2m+1},e_{2n}\rangle=\frac{\sqrt{(2n+1)(m+2)}}{2n+m+2}a_{2n+m+1}。$$

由 $C_\alpha B_\phi C_\alpha=B_\phi^*$ 可知，当 $2m+1\geqslant n$ 时，有

$$\alpha_{2n}\overline{\alpha_{2m+1}}\sqrt{\frac{n+1}{2m+2}}a_{2m+1-n}=\frac{\sqrt{(2n+1)(m+2)}}{2n+m+2}a_{2n+m+1};\tag{5}$$

当 $2m+1<n$ 时，有

$$\alpha_{2n}\overline{\alpha_{2m+1}}\sqrt{\frac{2m+2}{n+1}}b_{n-2m-1}=\frac{\sqrt{(2n+1)(m+2)}}{2n+m+2}a_{2n+m+1}。\tag{6}$$

令 $k=2m+1-n\geqslant 0$，则 $2m=k+n-1$ 代入式(5) 可得：

$$\alpha_{2k}\overline{\alpha_{k+n}}\sqrt{\frac{n+1}{k+n+1}}a_k=\frac{\sqrt{(4n+2)(k+n+3)}}{5n+k+3}a_{2n+\frac{k+n-1}{2}+1};\tag{7}$$

令 $j=n-2m-1\geqslant 1$，则 $n=j+2m+1$ 代入式(6) 可得：

$$\alpha_{2j+4m+2}\overline{\alpha_{2m+1}}\sqrt{\frac{2m+2}{j+2m+2}}b_j=\frac{\sqrt{(2j+4m+3)(m+2)}}{2j+5m+4}a_{2j+5m+3}。\tag{8}$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n+\frac{k+n-1}{2}+1}=\lim_{m\to\infty}a_{2j+5m+3}=0,$$

因此在式(7) 和式(8) 中分别令 $n\to\infty$，$m\to\infty$，可得：

$$a_k=0,k\geqslant 0;b_j=0,j\geqslant 1。$$

即得 $\phi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k+\sum_{j=1}^{\infty}b_j\,\bar{z}^j=0$。

对于符号为式(4)所示的 H-Toeplitz 算子，尚不清楚上述结果是否成立，但在某些限制条件下，上述结论仍然成立。

定理 2 设 N 为整数，$\phi(re^{i\theta})=\sum_{k=-\infty}^{N}e^{ik\theta}\varphi_k(r)\in L^{\infty}(\mathbb{D})$，则 B_ϕ 为 C_α- 对称当且仅当 $\phi=0$。

证明：充分性显然，下证必要性。设 H-Toeplitz 算子 B_ϕ 关于复共轭 C_α 复对称，即满足 $C_\alpha B_\phi C_\alpha=B_\phi^*$。对于每个非负整数 n，由**引理 3** 有

$$B_\phi(z^{2n})=\sum_{k=-n}^{N}2\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}(n+k+1)\,\hat{\varphi}_k(2n+k+2)z^{n+k}=\sum_{k=0}^{n+N}2\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}(k+1)\,\hat{\varphi}_{k-n}(n+k+2)z^k。$$

则当 $2m+1\leqslant n+N$ 时，有

$$\langle z^{2m+1},C_\alpha B_\phi C_\alpha z^{2n}\rangle=\langle B_\phi C_\alpha z^{2n},C_\alpha z^{2m+1}\rangle=\alpha_{2n}\,\overline{\alpha_{2m+1}}\langle B_\phi(z^{2n}),z^{2m+1}\rangle=$$

$$\alpha_{2n}\,\overline{\alpha_{2m+1}}\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\,\hat{\varphi}_{2m+1-n}(n+2m+3)\frac{1}{m+1}。$$

同理由**引理 3** 可知，当 $n\geqslant\max\{N,0\}$ 时，有

$$\langle z^{2m+1},B_\phi^*(z^{2n})\rangle=\langle B_\phi(z^{2m+1}),z^{2n}\rangle=0。$$

因此当 $2m+1\leqslant n+N$ 且 $n\geqslant\max\{N,0\}$ 时，有

$$\hat{\varphi}_{2m+1-n}(n+2m+3)=0。$$

令 $k=2m+1-n$，则对于每个 $k\leqslant N$，由上述计算得到：

$$\hat{\varphi}_k(2n+k+2)=0,n\geqslant\max\{N,0,-k\}。$$

于是由**引理 4** 可知，$\varphi_k=0,k\leqslant N$，即得 $\phi(re^{i\theta})=\sum_{k=-\infty}^{N}e^{ik\theta}\varphi_k(r)=0$。

3 结 语

本研究探讨了 Bergman 空间上一类 H-Toeplitz 算子关于给定复共轭 C_α 的复对称性。从特殊符号入手，通过考察调和函数符号或非调和函数符号的 H-Toeplitz 算子，来研究该算子关于 C_α 的复对称性。结果表明，当符号为调和函数符号或由拟齐次函数的和组成的非调和函数符号时，对应的 H-Toeplitz 算子关于给定的复共轭为复对称当且仅当该符号为零。

参考文献：

[1] GARCIA S R, PUTINAR M. Complex symmetric operators and applications[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2005, 358(3): 1285.

[2] KO E, LEE J E. On complex symmetric Toeplitz operators[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 434(1): 20.

[3] LI R, YANG Y, LU Y. A class of complex symmetric Toeplitz operators on Hardy and Bergman spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, 489(2): 124173.

[4] BU Q G, CHEN Y, ZHU S. Complex symmetric Toeplitz operators[J]. Integral Equations and Operator Theory, 2021, 93(15): 1.

[5] CAO J, DONG X T, ZHOU Z H. Complex symmetric Toeplitz operators on the unit polydisk and the unit ball[J]. Acta Mathematica Scientia, 2020, 40B(1): 35.

[6] HU X, DONG X T, ZHOU Z H. Complex symmetric monomial Toeplitz operators on the unit ball[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, 492(2): 124490.

[7] GUPTA A, SINGH S K. H-Toeplitz operators on the Bergman space[J]. Korean Mathematical Society, 2021, 58(2): 327.

（下转第 51 页）