

带跳的非仿射粗糙 Heston 模型欧式期权定价

陶祥兴,章丽琴

(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘要:【目的】为使 Heston(赫斯顿)模型能更细致地刻画标的资产价格演变规律以应对复杂多变的金融市场,提出了带跳的非仿射粗糙 Heston 模型。【方法】首先用傅里叶余弦级数(Fourier Cosine Series Expansion, Fourier-Cosine)方法分离期权密度函数和特征函数,用扰动法转化非线性偏积分微分方程,并用 Adams-Bashforth-Moulton(亚当斯-巴什福斯-默尔顿)预测-校正法求解分数黎卡提方程,从而得到欧式看涨期权定价公式;然后用蒙特卡洛模拟结果验证解的有效性;最后分析了模型非仿射参数、粗糙参数和跳幅度参数对期权价格的影响,并对比了不同模型的定价结果。【结果】数值解与蒙特卡洛模拟结果相对误差为 0.01%~0.2%,非仿射参数、粗糙参数和跳幅度参数对模型有不同程度的影响同时又相互制约。【结论】本模型刻画标的资产价格变化规律更具灵活性和多样性,从而为期权定价提供了理论支撑。

关键词: 粗糙 Heston;跳扩散模型;傅里叶余弦级数方法;非仿射;扰动法;分数黎卡提方程

中图分类号: F830.9 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-8798(2023)03-0201-08

European option pricing of non-affine rough Heston model with jump

TAO Xiangxing, ZHANG Liqin

(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, Zhejiang, China)

Abstract: [Objective] A non-affine rough Heston model with jump was proposed, enabling the Heston model to more accurately depict the underlying asset price evolution law so as to deal with the complex and changeable financial market. [Method] Firstly, the European call option pricing formula was obtained by separating the density function and the characteristic function of the option using the Fourier-Cosine (Fourier Cosine Series Expansion) method, transforming the nonlinear partial integral differential equation by virtue of the perturbation method and solving the fractional Riccati equation by virtue of the Adams-Bashforth-Moulton predictive correction method; secondly, the validity of the model solution was verified by the Monte Carlo simulation; finally, the influences of the non-affine parameter, the rough parameter and the

收稿日期: 2022-05-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(11771399);浙江省大学生科技创新活动计划(新苗人才计划)(2022R415C028)

通信作者: 陶祥兴(1966—),男,浙江省温岭人,教授,博士,主要从事金融数学与统计分析研究。E-mail: xxTao@zust.edu.cn。

jump parameter on option prices were analyzed and the pricing results of different models were compared. [Result] The results show that the relative error between the numerical solution and the Monte Carlo simulation result is in the range of $0.01\% \sim 0.2\%$, and the non-affine parameter, the rough parameter and the jump parameter have different degrees of influence on the model and also restrict each other. [Conclusion] The model depicts the underlying asset price movement with more flexibility and diversity, and provides theoretical support for option pricing.

Keywords: rough Heston; jump diffusion model; Fourier-Cosine method; non-affine; perturbation method; fractional Riccati equation

期权作为一种金融衍生产品在市场上起着对冲风险、优化资源配置的重要作用,而期权定价是期权发挥其作用的基础,因此期权定价理论自 20 世纪初以来取得了丰富的研究成果。1973 年,布莱克等开创性地提出期权定价模型 BSM(Black-Scholes-Merton,布莱克-斯科尔-莫顿模型)^[1-2]。针对波动率为常数的假设,Heston(赫斯顿)假设资产价格的波动率服从均值回复平方根过程,并推导了 Heston 模型的闭式解^[3]。Heston 模型具有刻画隐含波动率形状合理、存在闭式解等优点,因此得到了广泛的应用与研究。

Heston 模型在 BSM 模型基础上加入随机波动率的期权价格影响因素,然而真实市场上仍存在其他影响因素,因此目前对 Heston 模型的改进主要从利率、布朗运动、跳扩散过程、方差的幂和波动率的粗糙性这 5 个角度展开。针对 Heston 模型利率为常数的假设,Guo 等^[4-5]将随机利率过程引入 Heston 模型,分别提出了 Heston-Vasicek(赫斯顿-瓦西塞克)和 Heston-Merton(赫斯顿-莫顿)混合模型,并推导了欧式看涨期权的闭式解。柴婧婧等^[6]和 Chang 等^[7]分别将 Heston 模型的布朗运动改进为混合次分数布朗运动和近似分数布朗运动,从而使模型更符合资产价格长相依的特征。王伟等^[8]在分数布朗运动环境中,建立了带有违约风险的分数维 Vasicek 随机利率模型,并推导了欧式看涨期权定价公式的解析解。王波等^[9]和孙有发等^[10]通过改变模型中方差的幂分别提出了双因子 4/2 随机波动率模型和非仿射 Heston 模型,实证结果表明改进后的模型能够更精准地拟合期权价格。Gatheral 等^[11]的研究发现波动率是粗糙的,Euch 等^[12]根据这一结论提出了粗糙 Heston 模型,并得到了特征函数由分数黎卡提方程给出的结论。此外,也有综合考虑各项因素建立混合模型的研究,如孙玉东等^[13]在分数跳扩散环境下用 Heston 模型对算术平均亚式期权进行蒙特卡洛价格模拟,分析了蒙特卡洛模拟次数、执行价格和初始波动率对价格的影响;白亚楠等^[14]用带跳的 Heston-CIR(Heston-Cox-Ingersoll-Ross,赫斯顿-科克斯-英格索尔-罗斯)混合模型对欧式期权进行定价,数值模拟结果表明在混合模型中加入跳跃更接近真实市场;为捕捉到波动的粗糙行为和利率的随机性,He 等^[15]建立了粗糙 Heston-CIR 混合模型,并推导了半解析解公式。

综上所述,Heston 的改进模型虽然都展现出了优于 Heston 模型的定价精准度,但仍难以满足复杂多变的真实市场和多样的期权产品,因此建立一种具有灵活性的期权定价模型十分必要,这能更多样化地刻画标的资产价格运动。基于此,本研究将综合考虑金融时间序列的非线性特征、资产价格的跳跃行为和波动率的粗糙性这 3 种真实市场上期权价格的影响因素,提出带跳的非仿射粗糙 Heston 模型。

1 预备知识

定义 1 设 X 为连续型随机变量,其概率密度函数为 $g_X(x)$,则 X 的特征函数为

$$f_X(\varphi) = E[e^{i\varphi x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varphi x} g_X(x) dx. \quad (1)$$

式(1)中: φ 为一个实数; i 为虚数单位。

定义 2 二维 Dynkin(邓金)公式^{[16]296} 二维随机过程 $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t})$, $X_{1,t}$ 和 $X_{2,t}$ 满足以下方程:

$$\begin{cases} dX_{1,t} = f_1(X_{1,t}, X_{2,t}, t)dt + g_1(X_{1,t}, X_{2,t}, t)dW_{1,t} + X_{1,t}Y_t dN_{1,t}; \\ dX_{2,t} = f_2(X_{1,t}, X_{2,t}, t)dt + g_2(X_{1,t}, X_{2,t}, t)dW_{2,t} + Z_t dN_{2,t}. \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中: f_1, g_1, f_2 和 g_2 是关于 $X_{1,t}, X_{2,t}$ 和 t 不断变化的函数; $W_{1,t}$ 和 $W_{2,t}$ 是标准布朗运动, 且 $dW_{1,t}dW_{2,t} = \rho dt$; Y_t 和 Z_t 为随机变量; $N_{1,t}$ 和 $N_{2,t}$ 是独立的泊松过程, 跳强度分别为 λ_1 和 λ_2 。

设 $U(x_1, x_2)$ 为有界实值函数, 对 x_1, x_2 二次连续可微且 $u(x_1, x_2, t) = E[U(X_{1,T}, X_{2,T}) | X_{1,t} = x_1, X_{2,t} = x_2]$, 则 $u(x_1, x_2, t)$ 可由一个偏积分微分方程求得, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} + \bar{A}u(x_1, x_2, t) + \lambda_1 \int_{\mathbf{R}} [u(x_1 + y, x_2, t) - u(x_1, x_2, t)] \varphi_Y(y) dy + \\ \lambda_2 \int_{\mathbf{R}} [u(x_1, x_2 + z, t) - u(x_1, x_2, t)] \varphi_Z(z) dz = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)中: $\varphi_Y(y)$ 和 $\varphi_Z(z)$ 分别为 Y_t 和 Z_t 的概率密度函数; 边界条件 $u(x_1, x_2, T) = U(x_1, x_2)$; 符号 \bar{A} 被定义为

$$\begin{aligned} \bar{A}u(x_1, x_2, t) = f_1 \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} + \frac{1}{2} g_1^2 \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \\ \rho g_1 g_2 \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} g_2^2 \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2}. \end{aligned}$$

定义 3^{[12]2} 设 V_t 为标的资产波动率, H 为分数布朗运动 Hurst 指数(赫斯特指数), δ 为时间的增量, k 为常数。当对数波动率满足 $\ln(V_{t+\delta}) - \ln(V_t) = k\delta^H$, 且 $q > 0, H \in (0, 0.5)$ 时, 标的资产波动具有粗糙性。

定义 4^{[12]3} 当 $H \in (0, 1)$ 时, 分数布朗运动有如下 Mandelbrot-Van Ness(曼德尔布罗特-范尼斯)表达式:

$$W_t^H = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^0 ((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}) dW_s + \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s. \quad (4)$$

式(4)中: Γ 为 gamma(伽玛)函数; 当 $H < \frac{1}{2}$ 时, 由于粗糙核 $(t-s)^{H-\frac{1}{2}}$ 在分数布朗运动中发挥着关键作用, 因此将其引入粗糙 Heston 模型中。

2 欧式看涨期权定价

2.1 模型介绍

设一个完备概率空间为 $(\Omega, F, \{F_t\}_{0 \leq t \leq T}, Q)$, $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 满足通常的完备性和右连续性假设, Q 为风险中性概率测度。定义二维标准布朗运动 $\{W_t = (W_{1,t}^Q, W_{2,t}^Q)', t \geq 0\}$ 和泊松过程 N_t , 假定 W_t 与 N_t 相互独立, 设在风险中性概率测度 Q 下, 标的资产价格及其波动率满足以下随机微分方程:

$$\begin{cases} dS_t = (r - \lambda m)S_t dt + \sqrt{v_t}S_t dW_{1,t}^Q + (e^J - 1)S_t dN_t; \\ v_t = v_0 + \frac{\kappa^*}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} (\theta^* - v_u) du + \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} v_u^{\frac{\gamma}{2}} dW_{2,t}^Q; \\ dW_{1,t}^Q dW_{2,t}^Q = \rho dt. \end{cases} \quad (5)$$

式(5)中: v_t 为 t 时刻标的资产价格的方差; $r, \kappa^*, \theta^*, \sigma, \gamma, \rho$ 分别为无风险利率、均值回复速率、 v_t 的长期均值、波动率的方差、非仿射参数、 $W_{1,t}^Q$ 和 $W_{2,t}^Q$ 的相关系数; α 为粗糙参数, 且 $\alpha = H + 0.5$; J 为对数收益跳跃幅度, $J \sim N(\mu, \xi^2)$, μ 和 ξ 分别为正态分布的期望和标准差, 设概率密度函数为 $\omega(J)$, 光滑函数 $\omega(J)$ 有 $E(J) < \infty$; m 为平均跳幅度, 且 $m = E(e^J - 1)$ 。泊松过程 N_t 的跳强度为 λ , 则发生跳的概率为 $p(\omega_1) = \lambda dt$, 不发生跳的概率为 $p(\omega_2) = 1 - \lambda dt$ 。

2.2 Fourier-Cosine 定价公式

Fourier-Cosine(傅里叶余弦级数)公式可计算性强, 计算精度和效率高, 能将期权定价公式的概率密

度函数转化为易求的特征函数,并且可以将期权收益函数与特征函数分离,因此 Fourier-Cosine 公式逐渐广泛应用于衍生品定价中^{[10]890}。

令 $X = \ln(S_t/K)$, $y = \ln(S_T/K)$, S_t 和 S_T 分别为标的资产价格当前时刻 t 和到期时刻 T 的价格, K 为期权的执行价格。欧式期权在风险中性下的定价公式为

$$V(X, t) = e^{-r\tau} E^Q[V(y, T) | X] = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} V(y, T) g(y | X) dy. \quad (6)$$

式(6)中: τ 为期权剩余期限, $\tau = T - t$; 看涨期权到期收益 $V(y, T) = (S_T - K)^+ = [K(e^y - 1)]^+$; $g(y | X)$ 为 y 的条件密度函数。

用 $[a^*, b^*] \in \mathbb{R}$ 将式(6) 无穷区间截断, 则有 $V(X, t) \approx e^{-r\tau} \int_{a^*}^{b^*} V(y, T) g(y | X) dy$ 。

将 $g(y | X)$ 用余弦无穷级数展开, 逼近到 $g(y | X)$ 的特征函数, 从而完成密度函数到特征函数的转化, 并将余弦无穷级数截断为 N 项, 最终看涨期权 $V(X, t)$ 有如下近似表达, 具体推导可见文献^{[10]892-894}和^{[17]831}。

$$\begin{cases} \hat{V} = (X, t) = e^{-r\tau} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re} \left(e^{-ik\pi \frac{a^*}{b^* - a^*}} f \left(\frac{k\pi}{b^* - a^*} \middle| X \right) \right) U_k; \\ U_k = \frac{2K}{b^* - a^*} [\chi_k(0, b^*) - \phi_k(0, b^*)]; \\ \chi_k(0, b^*) = \int_0^{b^*} e^y \cos \left(k\pi \frac{y - a^*}{b^* - a^*} \right) dy; \\ \phi_k(0, b^*) = \int_0^{b^*} \cos \left(k\pi \frac{y - a^*}{b^* - a^*} \right) dy. \end{cases} \quad (7)$$

式(7)中: 符号'为对展开式首项乘以 $1/2$; $\text{Re}(\cdot)$ 为取实数部分; $f \left(\varphi = \frac{k\pi}{b^* - a^*} \middle| X = \ln \frac{S_t}{K} \right)$ 为条件特征函数。 $a^* = c_1 - L \sqrt{c_2 + \sqrt{c_4 + \dots + c_{2n}}}$, $b^* = c_1 + L \sqrt{c_2 + \sqrt{c_4 + \dots + c_{2n}}}$, $c_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 为随机变量 $y = \ln(S_T/K)$ 的 n 阶累计量, L 为一个合适的常数, 本研究取 10。根据文献^{[17]842}, Heston 模型取 $n = 2$ 便有足够的精度。

2.3 带跳的非仿射粗糙 Heston 模型欧式看涨期权定价公式

粗糙 Heston 模型与 Heston 模型的解结构相似, Heston 模型特征函数满足的黎卡提方程变成了分数黎卡提方程^{[12]1, [15]7-8}, 因此先求以下模型满足的黎卡提方程:

$$\begin{cases} dS_t = (r - \lambda m) S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t}^Q + (e^J - 1) S_t dN_t; \\ dv_t = \kappa^* (\theta^* - v_t) dt + \sigma v_t^{\frac{\gamma}{2}} dW_{2,t}^Q; \\ dW_{1,t}^Q dW_{2,t}^Q = \rho dt. \end{cases}$$

令 $Y_t = \ln S_t$, 由跳扩散伊藤公式可得

$$\begin{cases} dY_t = \left(r - \lambda m - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t}^Q + J dN_t; \\ dv_t = \kappa^* (\theta^* - v_t) dt + \sigma v_t^{\frac{\gamma}{2}} dW_{2,t}^Q; \\ dW_{1,t}^Q dW_{2,t}^Q = \rho dt. \end{cases} \quad (8)$$

由式(7)得使用 Fourier-Cosine 方法计算期权价格的关键在于得到特征函数, 根据定义, 给定初值 $X_t = \ln(S_t/K)$, v_t , 到期时刻下 $y = \ln(S_T/K)$ 的特征函数为

$$f_y(\varphi, \tau; X_t, v_t, t, J) = E^Q[e^{i\varphi y} | X_t, v_t, J]. \quad (9)$$

式(9)中: φ 为频率。

根据式(8)和式(9), 结合 Dynkin 公式可得特征函数所满足的偏积分微分方程^{[14]20-21, [18]24, [19]18}, 为简化记号省略下角标 t :

$$-\frac{\partial f}{\partial \tau} + \left(r - \lambda m - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial f}{\partial Y} + \kappa^* (\theta^* - v) \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 v^\gamma \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \rho \sigma v^{\frac{\gamma+1}{2}} \frac{\partial^2 f}{\partial Y \partial v} + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} [f(Y+J) - f(Y)] \omega(J) dJ = 0. \quad (10)$$

式(10)中:边界条件 $f_y(\varphi, 0; y, v_T, T, J) = 0$ 。

由于式(10)包含 v^γ 、 $v^{\frac{\gamma+1}{2}}$, 通常情况下无法获得非线性偏积分微分方程的解析解, 因此本研究采用扰动法转化为线性方程求其近似解^{[20]3}, 将 v^γ 、 $v^{\frac{\gamma+1}{2}}$ 在 $v = \theta^*$ 处一阶泰勒近似展开:

$$\begin{cases} v^\gamma \approx \theta^{*\gamma} (1 - \gamma) + \gamma \theta^{*(\gamma-1)} v; \\ v^{\frac{1+\gamma}{2}} \approx \theta^{*(1+\gamma)/2} \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) + \frac{1+\gamma}{2} \theta^{*(\gamma-1)/2} v. \end{cases} \quad (11)$$

采用待定系数法求解式(10), 设特征函数为

$$f_y(\varphi, \tau; X_t, v_t, t, J) = e^{i\varphi X + A(\varphi, \tau; J) + B(\varphi, \tau; v)}. \quad (12)$$

式(12)中:边界条件 $A(\varphi, 0; J) = 0, B(\varphi, 0) = 0$ 。

将式(11)和式(12)代入式(10), 化简可得特征函数满足的黎卡提方程, 求解该方程便可得特征函数的表达式:

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \gamma \theta^{*\gamma-1} B^2 + \left[i\varphi \rho \sigma \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \theta^{*(\gamma-1)/2} - \kappa^* \right] B + \frac{1}{2}i\varphi(i\varphi - 1); \\ \frac{\partial A}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \theta^{*\gamma} (1 - \gamma) B^2 + \left[i\varphi \rho \sigma \theta^{*(1+\gamma)/2} \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) + \kappa^* \theta^* \right] B + i\varphi(r - \lambda m) + \lambda \Lambda(J). \end{cases} \quad (13)$$

式(13)中: $\Lambda(J) = E[e^{i\varphi J} - 1] = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\varphi J} - 1) \omega(J) dJ = e^{\frac{2i\varphi \mu - \varphi^2 \xi^2}{2}} - 1$ 。

根据文献[12]³⁻⁴和文献[15]⁷⁻⁸, 式(7)Fourier-Cosine 公式中的条件概率密度函数对应的特征函数和分数黎卡提方程可由式(14)、式(15)和式(16)给出:

$$f_y(\varphi, \tau; X_t, v_t, t, J) = e^{i\varphi X + I^{1-\alpha} h(\varphi, \tau; v) + g(\varphi, \tau; J)}. \quad (14)$$

式(14)中 $h(\varphi, \tau)$ 满足的分数黎卡提方程及 $g(\varphi, \tau; J)$ 满足的式子为

$$D^\alpha h(\varphi, \tau) = \frac{1}{2}\sigma^2 \gamma \theta^{*\gamma-1} h^2(\varphi, \tau) + \left[i\varphi \rho \sigma \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \theta^{*(\gamma-1)/2} - \kappa^* \right] h(\varphi, \tau) + \frac{1}{2}i\varphi(i\varphi - 1), I^{1-\alpha} h(\varphi, 0) = 0; \quad (15)$$

$$g(\varphi, \tau; J) = \int_0^\tau \frac{1}{2}\sigma^2 \theta^{*\gamma} (1 - \gamma) h^2(\varphi, s) + \left[i\varphi \rho \sigma \theta^{*(1+\gamma)/2} \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) + \kappa^* \theta^* \right] h(\varphi, s) + i\varphi(r - \lambda m) + \lambda (e^{\frac{2i\varphi \mu - \varphi^2 \xi^2}{2}} - 1) ds. \quad (16)$$

式(15)中: $I^\alpha h(\varphi, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} h(\varphi, s) ds$; $D^\alpha h(\varphi, \tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau (\tau - s)^{-\alpha} h(\varphi, s) ds$ 。

下面将用 Adams(亚当斯)型预测-校正方法^[21-22]求解式(15), 该算法是经典 Adams-Bashforth-Moulton(亚当斯-巴什福斯-默尔顿)方法的推广, 首先通过分数阶积分运算^{[15]10}将式(15)转化为

$$h(\varphi, \tau) = I^\alpha [D^\alpha h(\varphi, \tau)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} F(\varphi; h(\varphi, s)) ds. \quad (17)$$

式(17)中: $F(\varphi; x) = \frac{1}{2}\sigma^2 \gamma \theta^{*\gamma-1} x^2 + \left[i\varphi \rho \sigma \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \theta^{*(\gamma-1)/2} - \kappa^* \right] x + \frac{1}{2}i\varphi(i\varphi - 1)$ 。

将区间 $[0, T-t]$ 拆成 N 份, 有 $dt = \frac{T-t}{N}$, $t_n = ndt$, $n = 0, 1, \dots, N$, 则 $h(\varphi, \tau)$ 中, $\tau \in [t, T]$ ($t \in [0, T]$),

对 τ 离散化后有 $h(\varphi, t_{n+1})$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, 且有初值 $h(\varphi, t_0) = 0, t_0 = 0$ 。因此, 求 $h(\varphi, t_{n+1})$ 的关键在于求 $h(\varphi, t_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$ 。Adams-Bashforth-Moulton 预测-校正方法主要分为 2 步, 其思路是先求出 $h(\varphi, t_{n+1})$ 的 Adams-Moulton 校正公式 $\hat{h}(\varphi, t_{n+1})$, 后求出校正公式中 $h(\varphi, t_{n+1})$ 的 Adams-Bashforth 预测公式 $h^p(\varphi, t_{n+1})$ 。预测公式 $h^p(\varphi, t_{n+1})$ 由 $h(\varphi, t_j)$, $j \leq n$ 计算, 通过给定初始值不断迭代求得 $h(\varphi, t_{n+1})$ 的

近似值。

下面将分别求出 Adams-Moulton 校正公式与 Adams-Bashforth 预测公式,将式(17)变换到可离散化的区间 $[0, t_{n+1}]$ 上:

$$h(\varphi, t_{n+1}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)^{\alpha-1} F(\varphi; h(\varphi, s)) ds. \quad (18)$$

将右边的积分在 $[0, t_{n+1}]$ 区间离散化可得 Adams-Moulton 校正公式,即

$$\hat{h}(\varphi, t_{n+1}) = \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} F(\varphi; h(\varphi, t_j)) + b_{n+1,n+1} F(\varphi; h^p(\varphi, t_{n+1})). \quad (19)$$

式(19)中:

$$\begin{cases} b_{0,n+1} = \frac{(dt)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} [n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha]; \\ b_{j,n+1} = \frac{(dt)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} [(n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1}], 1 \leq j \leq n; \\ b_{n+1,n+1} = \frac{(dt)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}. \end{cases}$$

将式(18)用近似矩形求积公式在 $[t_j, t_{j+1}]$ 区间离散化可得 Adams-Bashforth 校正公式,即

$$h^p(\varphi, t_{n+1}) = \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} F(\varphi; h(\varphi, t_j)). \quad (20)$$

式(20)中: $a_{j,n+1} = \frac{(dt)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} [(n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha], 0 \leq j \leq n$ 。

式(19)和式(20)及初始值 $h(\varphi, t_0) = 0, t_0 = 0$ 便构成了完整的 Adams 型预测-校正算法公式。式(16)的 $g(\varphi, \tau; J)$ 值也易求,将其在 $[0, t_{n+1}]$ 区间上离散化得

$$g(\varphi, t_{n+1}; J) = dt \sum_{j=0}^{n+1} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 \theta^{*\gamma} (1-\gamma) h^2(\varphi, t_j) + \left[i \rho \sigma \theta^{*(1+\gamma)/2} \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) + \kappa^* \theta^* \right] h(\varphi, t_j) + i \varphi (r - \lambda m) + \lambda \left(e^{\frac{2i \varphi m - \varphi^2 \xi^2}{2}} - 1 \right) \right].$$

文献[23]为本研究的数值解收敛性提供了理论依据,给定 $t > 0$ 及 $\varphi \in \mathbb{R}$,对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\begin{aligned} \max_{t_j \in [0, t]} |\hat{h}(\varphi, t_j) - h(\varphi, t_j)| &= o(\delta); \\ \max_{t_j \in [\varepsilon, t]} |\hat{h}(\varphi, t_j) - h(\varphi, t_j)| &= o(\delta^{2-\alpha}). \end{aligned}$$

3 数值分析

为了验证本研究推导解的准确性,参照 He^[15]^[11-12]的做法,将蒙特卡洛模拟期权价格与闭式解期权价格做比较。模型参数取值见表 1。

表 1 模型参数取值

Table 1 Values of model parameter

参数	取值	参数	取值	参数	取值	参数	取值
MonteCarlo 模拟次数	10 000	α	0.8	r	0.03	ξ	0.25
无穷级数截断数	500	γ	3	κ^*	10	T	0.6
离散化区间数	100	ρ	-0.5	θ^*	0.2	t	0.2
λ	0.8	μ	0.22	σ	0.1	v_0	0.05

根据所设定的参数,本研究模型价格通过蒙特卡洛模拟的结果与公式期权定价的结果基本上重合,公式期权定价与蒙特卡洛模拟定价情况对比如图 1 所示。进一步分析公式期权定价与蒙特卡洛模拟定价两者差值相对公式期权定价结果的情况,本研究公式期权定价的相对误差基本上在 0.20% 及以下,从而验证了公式期权定价的准确性。本研究公式期权定价相对误差如图 2 所示。

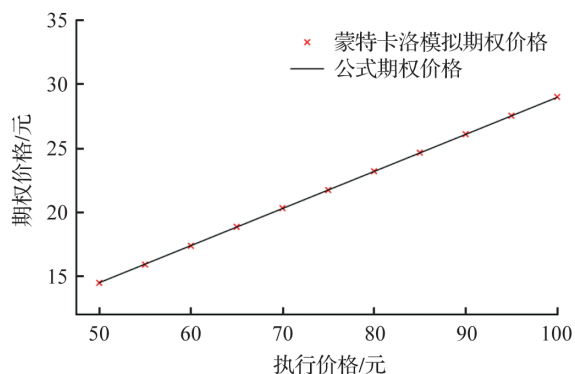


图1 公式期权定价与蒙特卡洛模拟定价情况对比

Fig. 1 Comparison between formula option pricing and Monte Carlo simulation pricing

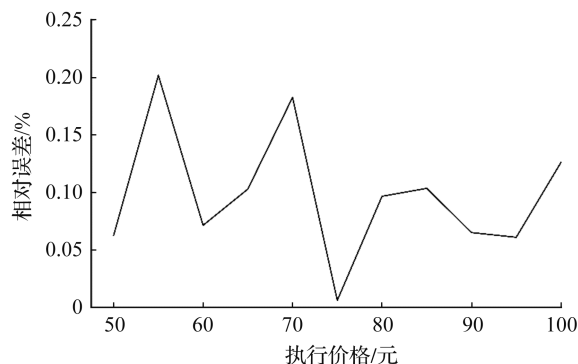


图2 本研究公式期权定价相对误差

Fig. 2 Relative error of formula option pricing in this study

为了对各模型的定价结果进行比较分析,将基于本研究模型,参照表1改变模型参数使本研究模型转化为已有的 Heston 改进模型,对比模型分别为 Heston 模型($\alpha=0.5, \gamma=1, \lambda=0$)、带跳 Heston 模型($\alpha=0.5, \gamma=1$)、非仿射 Heston 模型($\alpha=0.5, \lambda=0$)、粗糙 Heston 模型($\gamma=1, \lambda=0$)及带跳的非仿射 Heston 模型($\alpha=0.5$),以上模型除括号注明的参数以外,其他参数同表1。由试验可知,粗糙参数会使期权价格增大;传统 Heston 模型和非仿射 Heston 模型定价结果十分接近,说明仅加入非仿射参数对期权价格没有显著影响;由带跳的 Heston 模型与带跳非仿射 Heston 模型的对比可知,当跳幅度参数与非仿射参数共同作用于 Heston 模型时,非仿射参数对模型的作用会显著增大。综合来看,粗糙参数、非仿射参数和跳幅度参数普遍会使模型定价结果升高,其中,跳幅度参数的作用是最显著的。此外,当非仿射参数与跳幅度参数相结合时定价结果与原 Heston 模型出现了较大的偏差,此时粗糙参数表现出中和调节作用,能够拉低定价结果。由此可以得出,在原 Heston 模型基础上加入的非仿射参数、粗糙参数及跳幅度参数不仅分别对模型的定价有影响,三者之间又相互作用,相互制约。基于 Heston 模型改进的各类模型期权价格对比如图3所示。

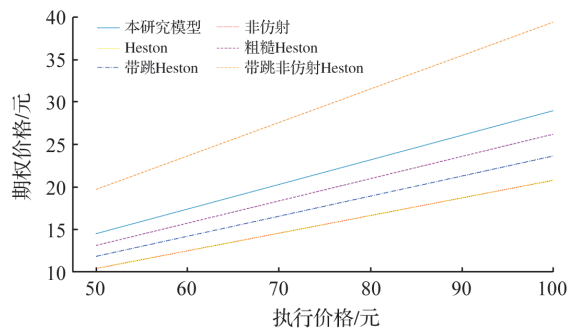


图3 基于 Heston 模型改进的各类模型期权价格对比

Fig. 3 Comparison of option prices of various models based on improved Heston model

4 结 语

本研究通过将非仿射参数、粗糙参数及跳幅度参数引入传统的 Heston 模型,提出了带跳的非仿射粗糙 Heston 模型。为了提高计算性能,选用 Fourier-Cosine 方法、扰动法、Adams-Bashforth-Moulton 预测-校正方法解得模型欧式看涨期权的数值解,并用蒙特卡洛模拟验证了公式推导的可信度。通过研究模型非仿射参数、粗糙参数和跳幅度参数的影响并对比基于本研究模型演化的5种模型,验证了模型具有灵活性与多样性的优势。本研究仍有可深入之处,如未对比各模型解析解或数值解的不同形式对期权定价结果的影响等,下一阶段将对模型进行实证分析研究。

参考文献:

- [1] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637.
- [2] MERTON R C. Theory of rational option pricing[J]. The Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, 4(1): 141.

- [3] MERTON R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, 3(1/2):125.
- [4] GUO Z D. Option pricing under the Heston model where the interest rate follows the Vasicek model[J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2019, 50(12):1.
- [5] 郭志东,汪贤洪. 期权定价的混合 Heston-Merton 模型[J]. *南华大学学报(自然科学版)*, 2020, 34(4):89.
- [6] 柴婧婧,郭精军. 混合高斯 Heston 资产定价模型及统计模拟分析[J]. *应用概率统计*, 2021, 37(4):331.
- [7] CHANG Y, WANG Y M, ZHANG S M, et al. Option pricing under double Heston model with approximative fractional stochastic volatility[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, 27(1):1.
- [8] 王伟,胡俊娟. 带违约风险分数维随机利率欧式看涨期权定价[J]. *浙江科技学院学报*, 2018, 5(5):358.
- [9] 王波,朱顺伟,邓亚东,等. 4/2 随机波动率模型下的期权定价[J]. *系统管理学报*, 2020, 29(1):192.
- [10] 孙有发,吴碧云,郭婷,等. 非仿射随机波动率模型下的 50ETF 期权定价:基于 Fourier-Cosine 方法[J]. *系统工程理论与实践*, 2020, 40(4):888.
- [11] GATHERAL J, JAISSON T, ROSENBAUM M. Volatility is rough[J]. *Quantitative Finance*, 2018, 18(6):933.
- [12] EUCH O E, ROSENBAUM. The characteristic function of rough Heston models[J]. *Mathematical Finance*, 2019, 29(1):1.
- [13] 孙玉东,田景仁,陈瑛. 分数跳扩散 Heston 模型下的算术平均亚式期权定价[J]. *杭州师范大学学报(自然科学版)*, 2019, 18(6):629.
- [14] 白亚楠,汪育兵. 带跳的 Heston-CIR 混合模型下的欧式期权定价[J]. *兰州文理学院学报(自然科学版)*, 2020, 34(3):18.
- [15] HE X J, LIN S. A semi-analytical pricing formula for European options under the rough Heston-CIR model[J]. *The Anziam Journal*, 2019, 61(4):1.
- [16] 杨雄. 随机波动率跳扩散模型的期权定价[J]. *淮阴师范学院学报(自然科学版)*, 2015, 14(4):296.
- [17] FANG F, OOSTERLEE C W. A novel pricing method for European options based on Fourier-Cosine series expansions[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2008, 31(2):831.
- [18] 吴碧云. 带双跳的 Heston 型非仿射随机波动率型下的 VIX 期权定价研究[D]. 广州:广东工业大学, 2021.
- [19] 白亚楠. 混合分形 Heston-CIR 模型下的期权定价及统计模拟分析[D]. 兰州:兰州财经大学, 2021.
- [20] 吴鑫育,杨文昱,马超群,等. 基于非仿射随机波动率模型的期权定价研究[J]. *中国管理科学*, 2013, 21(1):3.
- [21] DIETHELM K, FORD N J, FREED A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 29(1/2/3/4):3.
- [22] DIETHELM K, FREED A D. The FracPECE subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order[C]//*Orschung Und Wissenschaftliches Rechnen*. Göttingen: Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung, 1999:57.
- [23] LI C P, TAO C X. On the fractional Adams method[J]. *Computer and Mathematics with Applications*, 2009, 58(8):1573.