浙江科技学院学报,第 35 卷第 3 期,2023 年 6 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 35 No. 3, Jun. 2023

doi: 10.3969/j.issn.1671-8798.2023.03.004

Ait-Sahalia 利率模型数值解收敛性分析

闵鎣宵,季彦颋,王莹莹,房启全
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要:【目的】为研究一类高度非线性的广义 Ait-Sahalia 利率模型,对其数值解的收敛性进行证明。**【方法】**首先引入迭代方法证明方程存在唯一的全局正解;然后从经典欧拉(Euler-Maruyama,EM)数值格式出发,得到了广义 Ait-Sahalia 利率模型的驯服(tamed)欧拉数值解;最后修正方程系数所满足的条件,证明方程的驯服欧拉数值解依概率收敛于方程的解析解。**【结果】**对于漂移项和扩散项都高度非线性的随机微分方程,通过改进经典欧拉方法及处理方程漂移项和扩散项的系数条件,可获得具有依概率收敛性质的数值解。**【结论】**本研究结果可推广至其他类型的利率模型数值解研究,对金融衍生品分析和定价具有一定的指导意义。

关键词: Ait-Sahalia 利率模型;随机微分方程;tamed EM 数值解;收敛性
中图分类号: O211.63　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1671-8798(2023)03-0213-06

Convergence analysis of numerical solution of Ait-Sahalia interest rate model

MIN Yingxiao, JI Yanting, WANG Yingying, FANG Qiquang
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, Zhejiang, China)

Abstract: [**Objective**] A generalized Ait-Sahalia interest rate model, being highly nonlinear, was investigated to demonstrate the convergence of its numerical solution. [**Method**] Firstly, an iterative method was introduced to prove the existence of a unique global positive solution to the equation; then, the tamed Euler-Maruyama (EM) numerical solution of the generalized Ait-Sahalia interest rate model was derived from the classical EM numerical format; finally, the conditions satisfied by the coefficients of the equation were modified to prove that the tamed EM numerical solution of the equation converges with probability to the analytical solution of the equation. [**Result**] For the stochastic differential equation with highly nonlinear drift and diffusion terms, the numerical solution with probabilistic convergence can be obtained by improving the classical EM method and dealing with the coefficient conditions of the drift and

收稿日期: 2022-05-10
基金项目: 国家自然科学基金项目(11701513)
通信作者: 房启全(1982—　),男,安徽省阜阳人,副教授,博士,主要从事调和分析及其应用和金融数学研究。E-mail:111018@zust.edu.cn。

diffusion terms of the equation. [**Conclusion**] The research results can be extended to the numerical solution research of other types of interest rate models, which is of guiding significance for the analysis and pricing of financial derivatives.

Keywords: Ait-Sahalia interest rate model; stochastic differential equation; tamed EM numerical solution; convergence

各类金融衍生产品定价的复杂性和资产风险管理的重要性,使得短期利率模型的研究一直为许多研究者所热衷。Black 等[1]最早利用几何布朗运动描述股票价格的动态变化,研究得到了经典的 Black-Scholes 期权定价理论。Vasicek[2]在此基础上引入利率均值回复的特征,提出了 Vasicek 利率模型。然而在 Vasicek 模型中,存在利率为负的概率,这与现实情况不符,因此为达到使利率水平始终为非负数的目的,Cox 等[3]采用了将瞬时波动率设定为与利率的平方根成正比的方法,提出了广义多因子平方根扩散(Cox-Ingersoll-Ross,CIR)模型。但是上述模型对即期利率的刻画存在差异,为了更有效地刻画即期利率的特性,Ait-Sahalia 建立了一类非线性的随机微分方程利率模型,即 Ait-Sahalia 利率模型[4]。

虽然目前已经建立了丰富的利率模型,但由于上述非线性利率模型大多很难求得具体的解析解,因此在实际运用中常采用数值解来代替精确解进行研究。为此,李焕荣[5]对经典欧拉、米尔斯坦(Milstein)、龙格-库塔(Runge-Kutta)3 种数值求解方法的应用和误差分析进行了研究,结果表明米尔斯坦和龙格-库塔方法的数值解比欧拉方法的数值解更接近真实解。然而当方程的系数不满足全局李普希茨[6](Lipschitz)条件时,经典的欧拉数值格式无法保证其收敛性;Wang 等[7]给出了这种发散情况的具体证明并通过一个数值算例来展示其发散性质。为了重新获得收敛性,Deng 等[8]引入了驯服欧拉数值格式,证明了当方程系数高度非线性时,驯服欧拉数值解是强收敛的。此外,Gao 等[9]引入了截断(truncated)欧拉对非线性增长系数进行处理,证明了截断欧拉数值格式的收敛性。

对 Ait-Sahalia 利率模型的性质研究,Mao 等[10]认为波动率是即期利率的函数,建立了广义 Ait-Sahalia 模型的截断欧拉近似解,给出其收敛性并证明该模型可运用于金融衍生品定价。在此基础上,张雪峰[11]依次构造了 Ait-Sahalia 利率模型的截断欧拉数值解和后向(backward)欧拉数值解,结果表明 2 种数值格式都收敛于真实解。徐麒等[12]则进一步研究了波动率满足 Ait-Sahalia 模型的高度非线性随机理论模型,给出了该模型非负解的存在唯一性、矩有界性,并证明了该模型的欧拉数值解是强收敛的。

上述研究都对 Ait-Sahalia 利率模型的不同数值格式进行了分析,但尚未有研究者考虑用驯服技巧来处理带高度非线性系数的 Ait-Sahalia 方程。因此,本研究基于广义 Ait-Sahalia 利率模型,建立该方程的驯服欧拉数值解,通过修正其漂移项和扩散项的系数所满足的条件,对方程的驯服欧拉数值解依概率收敛于方程的解析解,并给出其具体的证明过程。

1 模型与假设

假定$\{\Omega,F,P\}$为完备的概率空间,并且符合通常条件的σ代数流$\{F_t\}_{t\geqslant 0}$,设在该概率空间上的标准布朗运动为$w(t)$,并设函数$V(x)$为一个二次可微函数,则V_x、V_t分别为$V(x)$对x、t求一阶偏导所得偏导数,V_{xx}为$V(x)$对x求二阶偏导所得偏导数。

考虑一般情况下的 Ait-Sahalia 利率模型:

$$\mathrm{d}x(t)=(\alpha_{-1}x(t)^{-1}-\alpha_0+\alpha_1x(t)-\alpha_2x(t)^r)\mathrm{d}t+\alpha_3x(t)^\rho\mathrm{d}w(t)。\tag{1}$$

式(1)中:α_{-1}、α_0、α_1、α_2、α_3均为正常数,且$\rho>1$,$r>1$。

令$f(x(t))=(\alpha_{-1}x(t)^{-1}-\alpha_0+\alpha_1x(t)-\alpha_2x(t)^r)$,$g(x(t))=\alpha_3x(t)^\rho$。

假设 1 对任意给定的常数$R>0$,存在常数$L_R>0$,使得

$$|f(x,t)-f(y,t)|\vee|g(x,t)-g(y,t)|\leqslant L_R(|x-y|)。\tag{2}$$

式(2)中:$x,y\in\mathbb{R}^d$,$|x|\vee|y|\vee|\bar{x}|\vee|\bar{y}|\leqslant R$。

文献[13] 证明了广义的 Ait-Sahalia 利率模型微分方程在局部李普希茨条件下存在唯一正解，由此可证明**引理 1**。

引理 1　若**假设 1** 成立，对于正整数 $k>0$ 且满足 $\frac{1}{k}<x(0)<k$，定义停时

$$\tau_k=\inf\left\{t\in[0,\tau_{\in}):x(t)\notin\left(\frac{1}{k},k\right)\right\},$$

则存在常数 K 满足 $P(\tau_k\leqslant T)\leqslant\dfrac{V(x_0)+KT}{V\left(\frac{1}{k}\right)\wedge V(k)}$。

证明：给出两个常数，其中 $\gamma_1\in(0,1)$，$\gamma_2>1$，定义函数

$$V(x)=x^{\gamma_1}+x^{-\gamma_2}。$$

显然，当 $x\to 0$ 或 $x\to\infty$ 时，$V(x)\to\infty$，由伊藤公式[14]，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V(x(t))=&\left[V_t(x(t))+V_x(x)f(x(t))+\frac{1}{2}V_{xx}(x(t))g^2(x(t))\right]\mathrm{d}t+V_x(x(t))g(x(t))\mathrm{d}w(t)=\\&[\gamma_1x(t)^{\gamma_1-1}-\gamma_2x(t)^{-\gamma_2-1}]f(x(t))\mathrm{d}t+[\gamma_1x(t)^{\gamma_1-1}-\gamma_2x(t)^{-(\gamma_2+1)}]\mathrm{d}w(t)+\\&\frac{1}{2}[\gamma_1(\gamma_1-1)x(t)^{\gamma_1-2}+\gamma_2(\gamma_2+1)x(t)^{-(\gamma_2+2)}]g^2(x(t))\mathrm{d}t。\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}V_1(x(t))=&[\gamma_1x(t)^{\gamma_1-1}-\gamma_2x(t)^{-\gamma_2-1}]f(x(t))+\frac{1}{2}[\gamma_1(\gamma_1-1)x(t)^{\gamma_1-2}+\gamma_2(\gamma_2+1)x(t)^{-(\gamma_2+2)}]g^2(x(t))=\\&\gamma_1\alpha_{-1}x(t)^{\gamma_1-2}-\alpha_0\gamma_1x(t)^{\gamma_1-1}+\alpha_1\gamma_1x(t)^{\gamma_1}-\alpha_2\gamma_1x(t)^{\gamma_1-1+r}-\alpha_{-1}\gamma_2x(t)^{-(\gamma_2+2)}+\\&\alpha_0\gamma_2x(t)^{-(\gamma_2+1)}-\alpha_1\gamma_2x(t)^{-\gamma_2}+\gamma_2x(t)^{-(\gamma_2+1)+r}+\frac{\sigma^2}{2}[\gamma_1(\gamma_1-1)x(t)^{\gamma_1-2+2\rho}+\\&\gamma_2(\gamma_2+1)x(t)^{-(\gamma_2+2)+2\rho}],\end{aligned}\tag{3}$$

对于任意的 $t\in[0,T]$，对式(3) 左右两边同时取定积分于区间$[0,t]$ 则有

$$V(x(t\wedge\tau_k))\leqslant V(x_0)+\int_0^{t\wedge\tau_k}V_1(x(s))\mathrm{d}s。$$

因为 $\gamma_1\in(0,1)$，$\gamma_2>1$，α_{-1}、α_0、α_1、α_2、α_3 均为正常数，且 $\rho>1$，$r>1$，故我们能得到一个常数 K，使得

$$V_1(x(t))<K,$$

进一步对方程两边同时取期望，则有

$$\mathrm{E}(V(x(t\wedge\tau_k)))\leqslant V(x_0)+KT。$$

由期望公式进而有

$$P(\tau_k\leqslant T)\left(V\left(\frac{1}{k}\right)\wedge V(k)\right)\leqslant\mathrm{E}(V(x(t\wedge\tau_k)))。$$

因此

$$P(\tau_k\leqslant T)\leqslant\frac{\mathrm{E}(V(x(t\wedge\tau_k)))}{V\left(\frac{1}{k}\right)\wedge V(k)}\leqslant\frac{V(x_0)+KT}{V\left(\frac{1}{k}\right)\wedge V(k)}。\tag{4}$$

2　驯服欧拉数值格式

由于式(1) 的解析解难以获得，本研究结合驯服技巧和经典欧拉数值格式，给出方程的驯服欧拉数值格式，并给出依概率收敛的证明过程。定义步长 $\Delta\in(0,1)$，给出离散时间驯服欧拉数值格式：

$$X_{k+1}=X_k+f_h(X_k)\Delta+g_h(X_k)\Delta w_k。\tag{5}$$

式(5) 中：$\Delta w_k=w_{(k+1)\Delta}-w_{k\Delta}$，$f_h(x)=\pi_hf(x)$，$g_h=\pi_hg(x)$。

定义 π_h 为

$$\pi_h = \frac{1}{1+\Delta(|f(x)|+|g(x)|)}。$$

连续驯服欧拉数值格式则为

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_h(\overline{X}(s))\mathrm{d}s + \int_0^t g_h(\overline{X}(s))\mathrm{d}w(s)。 \tag{6}$$

式(6)中：$\overline{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \mathrm{I}_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}$，记 $X(k\Delta) = \overline{X}(k\Delta) = X_k$。

假设 2 对于任意常数 R，存在一个依赖于 R 的常数 N_R，对任意的 $x \in \mathbb{R}^d$ 使得

$$\sup_{|x|\leqslant R} |f(x,t) - f_h(x,t)| \vee |g(x,t) - g_h(x,t)| \leqslant N_R\Delta。$$

3 收敛性证明

为证明式(1)的驯服欧拉数值格式依概率收敛于其真实解，在证明之前先给出下列引理及其证明。

引理 2 若**假设 1** 和**假设 2** 成立，对充分大的 k，定义停时

$$\rho_k = \inf\left\{t \in [0,T]: X(t) \notin \left[\frac{1}{k},k\right]\right\}。$$

则存在常数 K_1 满足

$$P(\rho_k \leqslant T) \leqslant \frac{V(X_0) + KT + c_6(k)T\Delta^{\frac{1}{2}}}{V\left(\frac{1}{k}\right) \wedge V(k)}。 \tag{7}$$

式(7)中：$c_6(k)$ 为与 k 有关的常数。

证明：定义函数 $V:(0,+\infty) \to (0,\infty)$，则

$$V(x) = x^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2}\ln x。$$

对 $V(x)$ 由伊藤公式得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(V(X(t\wedge\rho_k))) = V(X_0) + \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\rho_k}\left[V_x(X(s))f_h(\overline{X}(s)) + \frac{1}{2}V_{xx}(X(s))g_h^2(\overline{X}(s))\right]\mathrm{d}s = \\
&V(X_0) + \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\rho_k}\left[\frac{1}{2}(X^{-\frac{1}{2}}(s) - X^{-1}(s))f_h(\overline{X}(s)) + \frac{1}{4}\left(X^{-2}(s) - \frac{X^{-\frac{3}{2}}(s)}{2}\right)g_h^2(\overline{X}(s))\right]\mathrm{d}s \leqslant \\
&V(X_0) + \mathrm{E}[V_1(x(t))] + \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\rho_k}\frac{1}{2}(X^{-\frac{1}{2}}(s) - X^{-1}(s))f_h(\overline{X}(s))\mathrm{d}s + \\
&\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\rho_k}\frac{1}{4}\left(X^{-2}(s) - \frac{X^{-\frac{3}{2}}(s)}{2}\right)(g_h^2(\overline{X}(s)) - g^2(X(s)))\mathrm{d}s。
\end{aligned} \tag{8}$$

当 $X(t) \in \left[\frac{1}{k},k\right]$时，显然有$\overline{X}(t) \in \left[\frac{1}{k},k\right]$，因此得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(V(X(t\wedge\rho_k))) \leqslant V(X_0) + KT + \frac{1}{2}(k + k^{\frac{1}{2}})\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\rho_k} f_h(\overline{X}(s))\mathrm{d}s + \\
&\frac{1}{4}\left(k^2 + \frac{k^{\frac{3}{2}}}{2}\right)\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\rho_k}(g_h^2(\overline{X}(s)) - g^2(X(s)))\mathrm{d}s。
\end{aligned}$$

由局部的李普希茨条件可知：

$$|\overline{X}^{2\rho}(s) - X^{2\rho}(s)| \leqslant c_1(k)|\overline{X} - X(s)|^2 \leqslant c_2(k)|\overline{X} - X(s)|。$$

进而式(8)可简化为

$$\mathrm{E}(V(X(t\wedge\rho_k))) \leqslant V(X_0) + K_1T + c_3(k)\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\rho_k}|\overline{X}(s) - X(s)|\mathrm{d}s。 \tag{9}$$

对任意的 $s \in [0,t\wedge\rho_k]$，令$[s/\Delta]$为 s/Δ 的整数部分，则有

$$\begin{aligned}
&X(s) - \overline{X}(s) = X(s) - X_{[\frac{s}{\Delta}]} = \\
&f_h(X_{[\frac{s}{\Delta}]})\left(s - \left[\frac{s}{\Delta}\right]\Delta\right) + g_h(X_{[\frac{s}{\Delta}]})\left(w(s) - w\left(\left[\frac{s}{\Delta}\right]\Delta\right)\right) \leqslant
\end{aligned}$$

$$c_4(k)\Delta+g_h(X_{[\frac{s}{\Delta}]})\left|\left(w(s)-w\left(\left[\frac{s}{\Delta}\right]\Delta\right)\right)\right|。$$

由 $\Delta\in(0,1)$ 得

$$\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\rho_k}|X(s)-\overline{X}(s)|\mathrm{d}s\leqslant c_4(k)\Delta T+g_h(X_{[\frac{s}{\Delta}]})\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\rho_k}\left|\left(w(s)-w\left(\left[\frac{s}{\Delta}\right]\Delta\right)\right)\right|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$c_4(k)\Delta T+c_5(k)T\Delta^{\frac{1}{2}}\leqslant c_6(k)T\Delta^{\frac{1}{2}}。\tag{10}$$

由式(9)和式(10)可知：

$$\mathrm{E}(V(X(t\wedge\rho_k)))\leqslant V(X_0)+K_1T+c_6(k)T\Delta^{\frac{1}{2}}。$$

由此式(7)得证。

引理 3　设 $\theta_k=\tau_k\wedge\rho_k$，$e(t)=x(t)-X(t)$，则有对任意的 $t\in[0,T]$，存在正常数 $c_7(k)=c(k,T)$ 使得

$$\mathrm{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t\wedge\theta_k)-X(t\wedge\theta_k)|^2)\leqslant c_7(k)\Delta。$$

证明：由霍德尔(Hölder)不等式[15]和局部的李普希茨条件，可得

$$|x(t\wedge\theta_k)-X(t\wedge\theta_k)|^2=\left|\int_0^{t\wedge\theta_k}[f(x(s))-f_h(\overline{X}(s))]\mathrm{d}s+\int_0^{t\wedge\theta_k}[g(x(s))-g_h(\overline{X}(s))]\mathrm{d}w(s)\right|^2=$$
$$\sum_{i=1}^{6}H_i(t)\left|\int_0^{t\wedge\theta_k}(f(x(s))-f(X(s))+f(X(s))-f(\overline{X}(s))+f(\overline{X}(s))-\right.$$
$$f_h(\overline{X}(s)))\mathrm{d}s+\int_0^{t\wedge\theta_k}[g(x(s))-g(X(s))+g(X(s))-g(\overline{X}(s))+$$
$$\left.g(\overline{X}(s))-g_h(\overline{X}(s))]\mathrm{d}w(s)\right|^2\leqslant$$
$$C\int_0^{t\wedge\theta_k}|f(x(s))-f(X(s))|^2\mathrm{d}s+C\int_0^{t\wedge\theta_k}|f(X(s))-f(\overline{X}(s))|^2\mathrm{d}s+$$
$$C\int_0^{t\wedge\theta_k}|f(\overline{X}(s))-f_h(\overline{X}(s))|^2\mathrm{d}s+C\left|\int_0^{t\wedge\theta_k}(g(x(s))-g(X(s)))\mathrm{d}w(s)\right|^2+$$
$$\left|\int_0^{t\wedge\theta_k}(g(X(s))-g(\overline{X}(s)))\mathrm{d}w(s)\right|^2+C\left|\int_0^{t\wedge\theta_k}(g(\overline{X}(s))-g_h(\overline{X}(s)))\mathrm{d}w(s)\right|^2。\tag{11}$$

由霍德尔不等式和局部的李普希茨条件，可得

$$\mathrm{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}H_1(t))=\mathrm{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^{t\wedge\theta_k}|x(s)-X(s)|^2\mathrm{d}s)\leqslant C\mathrm{E}\int_0^T\sup_{0\leqslant u\leqslant s}|x(u\wedge\theta_k)-X(u\wedge\theta_k)|^2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$C\mathrm{E}\int_0^T\sup_{0\leqslant u\leqslant s}|e(u\wedge\theta_k)|^2\mathrm{d}s。$$

由局部的李普希茨条件得

$$\mathrm{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}H_2(t))=\mathrm{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^{t\wedge\theta_k}|f(X(s))-f(\overline{X}(s))|^2\mathrm{d}s\right)\leqslant\mathrm{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^{t\wedge\theta_k}|X(s)-\overline{X}(s)|^2\mathrm{d}s\right)\leqslant$$
$$(c_6)T\Delta\leqslant C_k\Delta。$$

由**假设 2** 得

$$\mathrm{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}H_3(t))=\mathrm{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^{t\wedge\theta_k}|f(\overline{X}(s))-f_h(\overline{X}(s))|^2\mathrm{d}s\right)\leqslant$$
$$\mathrm{E}\int_0^T\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|f(\overline{X}(u\wedge\theta_k))-f_h(\overline{X}(u\wedge\theta_k))|^2\mathrm{d}s\leqslant CN_R^2\Delta^2。$$

根据霍尔德-大卫-范甘迪(Burkholder-Davis-Gundy，BDG)不等式[16]和局部的李普希茨条件得

$$\mathrm{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}H_4(t))=\mathrm{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}C\left|\int_0^{t\wedge\theta_k}(g(x(s))-g(X(s)))\mathrm{d}w(s)\right|^2\right)\leqslant C_p\mathrm{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^{t\wedge\theta_k}|g(x(s))-g(X(s))|^2\right)\leqslant$$
$$C\mathrm{E}\int_0^T\sup_{0\leqslant u\leqslant s}|x(u\wedge\theta_k)-X(u\wedge\theta_k)|^2\mathrm{d}s\leqslant C\mathrm{E}\int_0^T\sup_{0\leqslant u\leqslant s}|e(u\wedge\theta_k)|^2\mathrm{d}s。$$

同样地，根据霍尔德-大卫-范甘迪不等式[16]和局部的李普希茨条件得到

$$\mathrm{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} H_5(t)) = \mathrm{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} C\left|\int_0^{t\wedge\theta_k}(g(X(s))-g(\overline{X}(s)))\mathrm{d}w(s)\right|^2 \leqslant$$

$$C_p\mathrm{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^{t\wedge\theta_k}|g(X(s))-g(\overline{X}(s))|^2\mathrm{d}s\right)\leqslant(c_6)T\Delta\leqslant C_k\Delta。$$

由霍尔德-大卫-范甘迪不等式和**假设2**得

$$\mathrm{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} H_6(t)) = \mathrm{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^{t\wedge\theta_k}|g(\overline{X}(s))-g_h(\overline{X}(s))|^2\mathrm{d}s\right)\leqslant$$

$$\mathrm{E}\int_0^T\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|f(\overline{X}(u\wedge\theta_k))-f_h(\overline{X}(u\wedge\theta_k))|^2\mathrm{d}s\leqslant CN_R^2\Delta^2。$$

将上述结果代入式(11)得

$$\mathrm{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|e(t\wedge\theta_k)|^2)\leqslant C\mathrm{E}\int_0^T\sup_{0\leqslant u\leqslant s}|e(u\wedge\theta_k)|^2\mathrm{d}s+C。$$

由格朗沃尔[17](Gronwall)不等式得

$$\mathrm{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|e(t\wedge\theta_k)|^2)\leqslant C\Delta。\tag{12}$$

定理1 当$\Delta\to 0$时,对任意$\delta,\epsilon>0,T>0$,有

$$P(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t)-X(t)|^p\geqslant\delta)\leqslant\epsilon。$$

证明:对于任意的$\delta,\epsilon\in(0,1)$,令$\overline{\Omega}=\{\omega:\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t)-X(t)|^2\geqslant\epsilon\}$,由式(9)有

$$\delta P(\overline{\Omega}\cap(\theta_k\geqslant T))\leqslant\mathrm{E}(I_{\theta_k\geqslant T}\sup_{0\leqslant t\leqslant T\wedge\theta_k}|x(t)-X(t)|^2)\leqslant\mathrm{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T\wedge\theta_k}|x(t)-X(t)|^2)\leqslant C\Delta。$$

由式(4)和式(7)可得

$$P(\overline{\Omega})\leqslant P(\overline{\Omega}\cap(\theta_k\geqslant T))+P(\theta_k\leqslant T)\leqslant P(\overline{\Omega}\cap(\theta_k\geqslant T))+P(\tau_k\leqslant T)+P(\rho_k\leqslant T)\leqslant$$

$$\frac{C\Delta}{\delta}+\frac{V(X_0)+K_1T+c_5(k)T\Delta^{\frac{1}{2}}}{V\left(\frac{1}{k}\right)\wedge V(k)}。$$

取充分大k及充分小Δ使得$\frac{C\Delta}{\delta}\leqslant\frac{\epsilon}{2}$,$\frac{V(X_0)+K_1T+c_5(k)T\Delta^{\frac{1}{2}}}{V\left(\frac{1}{k}\right)\wedge V(k)}\leqslant\frac{\epsilon}{2}$,则$P(\overline{\Omega})=P(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t)-X(t)|^p\geqslant\delta)\leqslant\epsilon$得证。

4 结 语

本文研究了一类漂移项和扩散项皆为非线性的随机微分方程的数值解,对驯服欧拉数值格式进行分析,说明了数值解的依概率收敛条件。通过一系列技巧对非线性的系数项进行处理,最终得到驯服欧拉数值解依概率收敛于解析解的结论。本研究结果可推广至其他类型的利率模型数值解研究,对金融衍生品分析定价和资产风险管理具有一定指导意义。

参考文献:

[1] BLACK F, SCHOLES M. The valuation of options and corporate liability[J]. Journal of Political Economy, 1973, 8(3): 60.

[2] VASICEK O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 177.

[3] COX C J, INGERSOLL J E, ROSS A. An analysis of variable rate loan contracts[J]. Journal of Finance, 1980, 35(2): 389.

[4] YACINE A S. Testing continuous-time models of the spot interest rate[J]. Review of Financial Studies, 1996(2): 385.

(下转第233页)